

УДК 628.5:66.002.8

DOI <https://doi.org/10.32782/3041-2080/2026-7-21>

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РУХУ РІДКОЇ ФАЗИ В ЧАШОВОМУ РОТАЦІЙНОМУ ДИСПЕРГАТОРІ

**Корнієнко Ярослав Микитович,**

доктор технічних наук, професор

Національного технічного університету України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ORCID ID: 0000-0002-3031-6212

**Стьопчкін Денис Валерійович,**

аспірант

Національного технічного університету України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ORCID ID: 0009-0000-6321-2834

У статті досліджено процес руху рідкої фази в чашовому ротаційному диспергаторі, що застосовується для передпосівного оброблення насіннєвого матеріалу у псевдозрідженому шарі. Основною технологічною вимогою є формування крапель малого діаметра (до 50 мкм), що забезпечує запобігання агломерації зерен і створення рівномірного захисного покриття. Проведено аналіз існуючих математичних моделей розпилення, який показав їх обмеженість щодо врахування псевдопластичних властивостей гетерогенних суспензій, конічної геометрії робочого органа та температурних обмежень, пов'язаних із термолабільністю насіннєвого матеріалу. Запропоновано математичну модель руху рідини по конічній поверхні чашового диспергатора, яка базується на балансі відцентрових та в'язких сил і враховує реологічні властивості середовища за степеневим законом. У моделі враховано можливість переходу між одношаровим і двошаровим режимами течії плівки. Для визначення гідродинамічного режиму введено безрозмірний критерій  $Hg$ , який характеризує співвідношення інерційних та в'язких сил і дозволяє встановити умови існування стабільного одношарового руху. Показано, що саме цей режим забезпечує формування крапель необхідного розміру. Отримано аналітичні залежності, що описують розподіл товщини плівки вздовж поверхні диспергатора, а також встановлено взаємозв'язок між витратою рідини, кутною швидкістю обертання та діаметром крапель. Додатково розроблено теплову модель, яка дозволяє оцінити температурний режим процесу та забезпечити обмеження температури поверхні насіння на рівні не вище 40°C для збереження його схожості. Результати числового моделювання підтверджують адекватність запропонованої моделі та демонструють можливість досягнення необхідних параметрів розпилення навіть для висококонцентрованих суспензій. Отримані залежності можуть бути використані при проектуванні та оптимізації диспергаторів і технологічних режимів обробки насіння.

**Ключові слова:** чашовий диспергатор, псевдозріджений шар, розпилення, математична модель, плівка рідини, псевдопластична рідина, критерій  $Hg$ , розмір крапель, насіннєвий матеріал.

### **Korniienko Yaroslav, Stopochkin Denys. Mathematical model of liquid phase motion in a rotary cup atomizer for seed treatment in a fluidized bed**

The paper investigates the motion of the liquid phase in a rotary cup atomizer used for pre-sowing treatment of seed material in a fluidized bed. A key requirement of the process is the formation of fine droplets ( $\leq 50 \mu\text{m}$ ), which prevents particle agglomeration and ensures uniform coating formation on the seed surface. A critical analysis of existing atomization models is carried out, revealing their limitations in describing heterogeneous suspensions, non-Newtonian behavior, and conical geometries. To address these issues, an improved mathematical model of liquid flow along the conical surface of a rotary cup atomizer is proposed. The model is based on the balance between centrifugal and viscous forces and takes into account pseudoplastic rheological properties of the liquid. A dimensionless  $Hg$  criterion is introduced to characterize the hydrodynamic regime of the liquid film and to determine the conditions for stable single-layer flow. This regime is essential for controlled atomization and achieving the required droplet size. Relationships between film thickness, rotational speed, liquid flow rate, and droplet diameter are established. In addition, a thermal model is developed to ensure that the seed surface temperature does not exceed 40°C, which is necessary for maintaining seed viability. Numerical analysis confirms the adequacy of the proposed model and demonstrates the possibility of achieving optimal spraying conditions for concentrated suspensions.

**Key words:** rotary cup atomizer, fluidized bed, atomization, mathematical model, liquid film, pseudoplastic fluid,  $Hg$  criterion, droplet size, seed treatment.

**Вступ.** Технологія нанесення захисних оболонок на насіннєвий матеріал (дражування, інкрустація) у псевдозрідженому шарі ґрунтується на циклічному зволоженні зерна рідкою фазою з вмістом сухої речовини до 80% (мас.) та подальшому випаровуванні розчинника [13]. Визначальною умовою формування рівномірної пошарової оболонки є отримання крапель рідини діаметром  $d_{кр} \leq 50$  мкм, що унеможливує утворення рідинних містків між зернами і запобігає їх злипанню. Апарат із псевдозрідженим шаром (ПЗШ) [12] у режимі нерівномірного струменевопульсаційного псевдозрідження [7] (СПП) забезпечує температуру процесу  $T \leq 40^\circ\text{C}$ , необхідну для збереження схожості насіння, при коефіцієнті використання теплоти  $\eta \geq 50\%$ . Наявні конструкції пристроїв для введення рідкої фази – верхнє розпилення (top-spray), апарат Вурстера [8], ProCell та дисковий диспергатор – мають спільний недолік: обмежений об’єм зони зрошення, що за умов роботи з гетерогенними суспензіями призводить до нерівномірного розподілу вологи по зернам і, як наслідок, до агломерації [9].

Аналіз існуючих математичних моделей руху рідини в диспергаторах показує такі обмеження: модель Hinze & Milbourn [1] описує лише ньютонівські рідини і не враховує реологію суспензій; підхід Mantripragada & Sarkar [2] придатний для плоских дисків, але не поширюється на конічну геометрію з перфорацією; модель Любеки А.М. [3] верифіковано виключно для однокомпонентних розчинів з концентрацією до 40% мас. і не враховує термолабільність насіннєвого матеріалу. Таким чином, жодна з відомих моделей не охоплює одночасно псевдопластичну реологію гетерогенних суспензій, конічну геометрію диспергатора з розподіленою перфорацією та обмеження температури зерна  $T \leq 40^\circ\text{C}$ .

Перспективним технічним рішенням є ротаційний чашовий диспергатор із перфорованою бічною поверхнею, розроблений і досліджений на кафедрі хімічного машинобудування [3; 4]. Для адаптації цього диспергатора до умов обробки насіннєвого матеріалу потрібно побудувати математичну модель руху рідкої фази, яка враховуватиме специфічні реологічні властивості суспензій (торф + мікроорганізми + полімерні зв’язуючі) та термолабільність зерна.

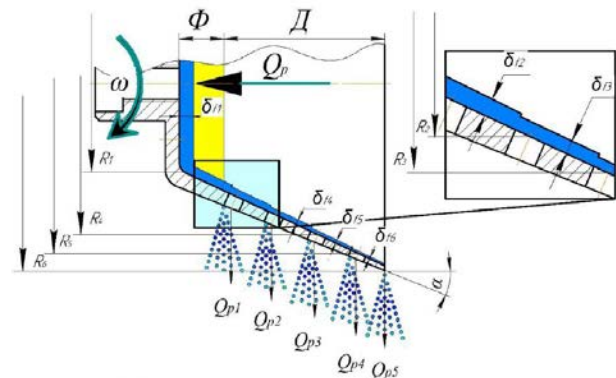
**Мета статті** – обґрунтування математичної моделі руху рідкої фази в чаші ротаційного диспергатора з різними реологічними властивостями при формуванні крапель заданого розміру для передпосівного оброблення насіннєвого зерна пшениці.

Для досягнення поставленої мети було визначено такі завдання: проаналізувати наявні

моделі розпилення; побудувати математичну модель руху плівки рідкої фази на конічній поверхні чашового диспергатора; встановити умови одношарового режиму течії за критерієм Нг; оцінити вплив параметрів процесу на розмір крапель і тепловий режим оброблення насіння.

Наукова новизна полягає у розробленні математичної моделі, яка враховує: двошарову структуру течії у відцентровому полі; в’язкопластичні властивості гетерогенної суспензії (аналог рідини Бінгама); перехід між режимами одношарового та двошарового руху за критерієм Нг; зв’язок між товщиною плівки  $\delta_f$ , розміром крапель  $d_{кр}$  та критерієм агломерації; обмеження  $T \leq 40^\circ\text{C}$  на поверхні зерна (тепловий підмодель).

**Методи та методики дослідження.** Розглянемо фізичну модель процесу розпилення при застосуванні чашового диспергатора з обґрунтуванням його основних геометричних параметрів. Ротаційний чашовий диспергатор являє собою зрізаний конус із перфорованою бічною поверхнею рис. 1. Розпилення рідкої фази відбувається через бічну перфоровану поверхню ротаційного диспергатора (рисунок 1).



**Рис. 1. Модель руху рідини в чаші ротаційного диспергатора з перфорованою бічною поверхнею**

У випадку коли в зоні  $\Phi$  формується плівка товщина якої сумірна з товщиною в’язкого гідродинамічного шару, тобто рідина не проковзує відносно поверхні чаші диспергатора і відцентрова сила буде впливати на формування крапель, які будуть розпилюватись в навколишній простір.

Введемо циліндричну систему координат: вісь  $z$  спрямована вздовж осі обертання,  $r$  – радіальна координата. Геометрію конуса описують такі параметри:

- $R_1$  – мінімальний радіус основи чаші (зона формування плівки), м;
- $R_2$  – максимальний радіус крайки диспергатора, м;

- $L$  – довжина твірної конуса, м;
- $\alpha$  – кут розкриття конуса ( $\alpha = 50^\circ$ ,  $\sin(\alpha/2) = 0,42$ );
- $\varphi_i$  – коефіцієнт перфорації в  $i$ -й зоні бічної поверхні, %;
- $d_{отв}$  – діаметр отворів перфорації, м;
- $n_i$  – кількість отворів у  $i$ -й зоні.

Поточний радіус конуса в довільному перерізі  $z$ :

$$R_i(z) = R_1 + z \cdot \operatorname{tg}(\alpha/2), \quad 0 \leq z \leq L \quad (1)$$

де  $z$  – координата вздовж твірної від меншої основи до більшої крайки.

Визначемо основні функціональні зони чашового диспергатора, що забезпечують ефективність процесу розпилення. Бічна поверхня умовно поділяється на дві функціональні зони:

– Зона «Ф» ( $0 \leq z/L \leq 0,23$ ): суцільна поверхня без перфорації. У цій зоні відбувається формування та розвиток в'язкого гідродинамічного підшару рідини. Під дією відцентрової сили рідина переміщується від  $R_1$  до початку перфорованої ділянки.

– Зона «Д» ( $0,23 < z/L \leq 1,0$ ): перфорована бічна поверхня, поділена на підзони  $Z_1-Z_5$  зі зростаючим коефіцієнтом перфорації  $\varphi_i$ . Крізь отвори рідина викидається в навколишній ПЗШ у вигляді крапель. На крайці ( $z = L, R = R_2$ ) залишкова рідина відривається у вигляді «фанового» факела.

Розглянемо баланс сил, що діють на плівку рідини в чашовому диспергаторі, відповідно до схеми їх дії, наведеної на рис. 2. На елементарний об'єм рідини  $dV = r \cdot dr \cdot dz \cdot d\theta$  у конічній чаші, що обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , діють такі сили:

Для тонкої плівки ( $\delta_f \ll R$ ) сила Коріоліса і сила поверхневого натягу є малими порівняно з відцентровою та в'язкою. Рівняння руху рідини вздовж поверхні конуса [11] (у проекції на твірну) набуває вигляду:

$$\mu_{\text{еф}} \cdot \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = -\rho_p \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos(\alpha/2) \quad (2)$$

Для математичної моделі розглянемо усталений рух тонкої плівки рідини вздовж внутрішньої конічної поверхні диспергатора, що обертається [11]. Прийняті припущення:

- товщина плівки значно менша поточного радіуса:  $\delta_f \ll R_i$  (виконується на практиці,  $\delta_f \sim 10-100$  мкм);
- течія усталена та осесиметрична;
- рідина підпорядковується узагальненій моделі Оствальда–де Ваале (степеневий закон):  $\tau = K \cdot \gamma^n$ ;
- при  $n = 1, K = \infty$  – ньютонівська рідина (розчини з низькою концентрацією);

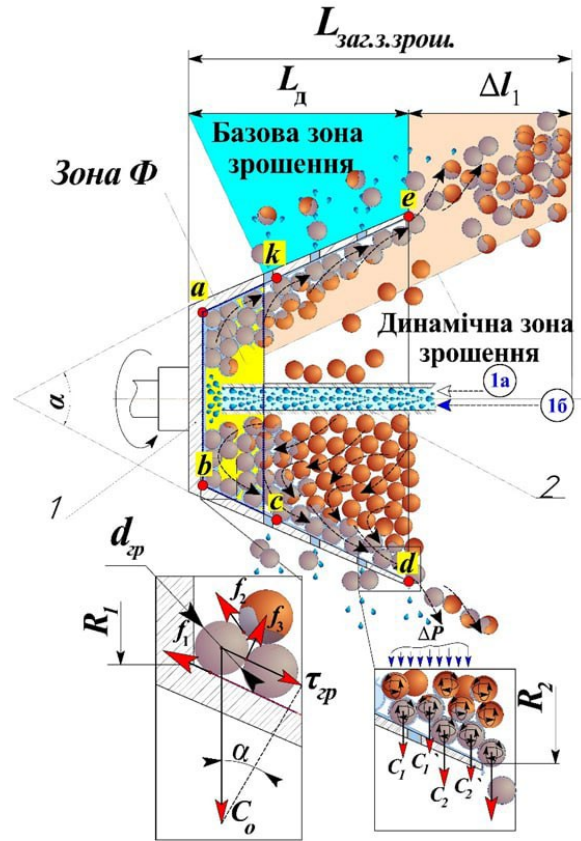


Рис. 2. Схема процесу розпилення рідкої фази в псевдозрідненому шарі:

1 – ротаційний диспергатор, 2 – трубка подачі рідкої фази; а) схема сил, що діють на гранули; б) схема взаємодії гранул у чаші диспергатора [3]

- відцентрова сила:  $F_\phi = \rho_p \cdot \omega^2 \cdot r \cdot dV$  (спрямована від осі обертання);
- в'язкий опір:  $F_v = \mu_{\text{еф}} \cdot \left(\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) \cdot dV$  (протидіє течії плівки);
- сила поверхневого натягу:  $F_\sigma = \sigma \cdot (1/r) \cdot dS$  (стабілізувальна);
- сила Коріоліса:  $F_k = 2\rho_p \cdot \omega \times v \cdot dV$  (відхиляє течію)

– при  $n < 1$  – псевдопластична рідина (суспензії торфу, 60–80% мас.).

Граничні умови до рівняння (2):

- $v_r = 0$  при  $z = 0$  – умова прилипання до стінки конуса;
- $\frac{\partial v_r}{\partial z} = 0$  при  $z = \delta_f$  – відсутність дотичних напружень на вільній поверхні плівки.

Для ньютонівської рідини ( $n = 1$ ) інтегрування рівняння (2) з урахуванням граничних умов дає профіль швидкості:

$$v_r(z) = \frac{\rho_p \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos(\alpha/2)}{2\mu} \cdot (2\delta_f \cdot z - z^2) \quad (3)$$

Об'ємні витрати рідини через перетин при поточному радіусі  $r$ :

$$Q_p = \frac{\pi \cdot \rho_p \cdot \omega^2 \cdot r \cdot \cos(\alpha/2) \cdot \delta_f^3}{3\mu} \quad (4)$$

Звідси товщина плівки на поточному радіусі  $R_i$ :

$$\delta_f(R_i) = \left( \frac{3\mu \cdot Q_p}{\pi \cdot \rho_p \cdot \omega^2 \cdot R_i \cdot \cos(\alpha/2)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

де  $\delta_f$  – товщина плівки рідини, м;  $\infty$  – динамічна в'язкість, Па·с;  $Q_p$  – об'ємна витрата рідини, м<sup>3</sup>/с;  $\rho_p$  – густина рідкої фази, кг/м<sup>3</sup>;  $\omega$  – кутова швидкість обертання, рад/с;  $R_i$  – поточний радіус конуса, м.

Розглянемо застосування математичної моделі руху плівки для псевдопластичної рідини з показником течії  $n < 1$ . Для суспензій торфуги з вмістом сухої речовини 60–80% мас. реологія описується степеневим законом:

$$\tau = K \cdot \left| \frac{\partial v_r}{\partial z} \right|^n \quad (6)$$

Рівняння руху набуває вигляду:

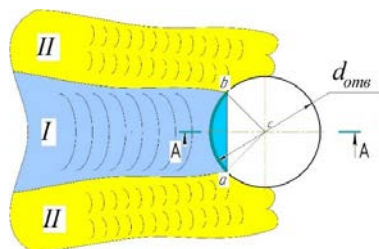
$$K \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \left| \frac{\partial v_r}{\partial z} \right|^{n-1} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) = -\rho_p \cdot \omega^2 \cdot R_i \cdot \cos(\alpha/2) \quad (7)$$

Інтегрування з тими самими граничними умовами дає профіль швидкості для псевдопластичної рідини:

$$v_r(z) = \frac{n}{n+1} \cdot \left( \frac{\rho_p \omega^2 R_i \cos(\alpha/2)}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \left[ \delta_f^{\frac{n+1}{n}} - (z - \delta_f)^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (8)$$

Об'ємні витрати через перетин:

$$Q_p = 2\pi R_i \cdot \frac{n}{2n+1} \cdot \left( \frac{\rho_p \omega^2 R_i \cos(\alpha/2)}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \delta_f^{\frac{2n+1}{n}} \quad (9)$$



а) модель руху рідини через бічний отвір на внутрішній поверхні диспергатора

Товщина плівки для псевдопластичної рідини:

$$\delta_f^{(n)}(R_i) = \left( \frac{Q_p (2n+1)}{2\pi R_i \cdot n} \cdot \left( \frac{K}{\rho_p \omega^2 R_i \cos(\alpha/2)} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{n}{2n+1}} \quad (10)$$

Зауваження: при  $n = 1$  рівняння (10) точно зводиться до рівняння (5), що підтверджує коректність узагальнення. Параметри  $K$  і  $n$  для суспензії торфуги (80% мас.) підлягають визначенню реологічними методами (ротаційна в'язкометрія) [10].

Для усунення ризику двошарового руху по бічній поверхні диспергатора з наступним збільшенням крапель рідини при розпилюванні застосована її перфорація. Припускаємо, що найбільша вірогідність проходження рідин через отвори на бічній поверхні це дуга  $ab$ ,  $\beta = 90^\circ$ , рисунок 3. Тоді довжина дуги в отворі на поверхні диспергатора розташованої перпендикулярно до напрямку руху рідини визначається:

$$ab = \frac{\pi \cdot d_{отв}}{4} \quad (11)$$

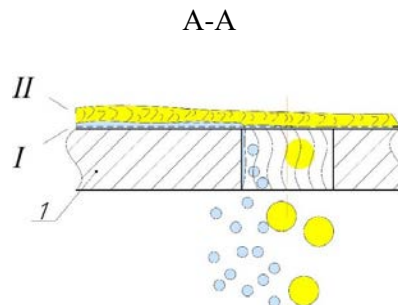
де  $d_{отв}$  – діаметр отворів на поверхні диспергатора, м.

Отже при кількості в отворів, що дорівнює  $i$ , приведена довжина крайки:

$$l_i = \overline{ab} \cdot i = \frac{\pi \cdot d_{отв}}{4} \cdot i \quad (12)$$

Наявність отворів на бічній поверхні зумовлює відтік рідини з плівки в навколишній ПЗШ. Введемо коефіцієнт розподілу витрат  $K_i$  для  $i$ -ї зони. Наведена довжина крайки отворів у зоні  $i$ :

$$l_i = \frac{\pi \cdot d_{отв} \cdot n_i}{4} \quad (13)$$



б) розріз руху шарів рідини

Рис. 3. Двошарова модель руху рідини по поверхні чаші диспергатора  
1 – стінка диспергатора, 2 – дисперговані краплі рідини  
I – в'язкий підшар рідини, II – другий шар рідини який проковзує по шару I

Коефіцієнт розподілу витрат:

$$K_i = \frac{\pi \cdot d_{\text{отв}}^2 \cdot n_i}{4\pi \cdot R_i} \quad (14)$$

Ефективні об'ємні витрати для кожної зони:

$$Q_p^*(i) = K_i \cdot Q_p \quad (15)$$

Закон зростання коефіцієнта:  $K_1 < K_2 < K_3 < K_4 < K_5 < K_6 = 1,0$  (крайка).

Товщина плівки у  $i$ -й зоні з урахуванням відтоку через перфорацію:

$$\delta_{f(i)} = \left( \frac{3\mu \cdot K_i \cdot Q_p}{\pi \cdot \rho_p \cdot \omega^2 \cdot R_i \cdot \sin(\alpha/2)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (16)$$

Рівняння (14) є основним для розрахунку розмірів крапель по довжині зони розпилення, оскільки  $d_{\text{кр}} \approx 4 \delta_f$  (співвідношення встановлено експериментально [3]).

Для критерія одношарового руху плівки рідини  $Hg$  та оцінки гідродинамічного режиму руху плівки на мінімальному радіусі  $R_1$  (найбільш критична зона) введемо плівковий критерій Рейнольдса:

$$Re_{nl} = \frac{Q_v}{\nu_p} \quad (17)$$

де питомі витрати  $Q_v$  визначаються як:

$$Q_v = \frac{Q_p}{2\pi \cdot R_1} \quad (18)$$

$\nu_p$  – кінематична в'язкість рідкої фази,  $m^2/s$ .

Відцентровий критерій Фруда на мінімальному радіусі:

$$Fr_{\min} = \frac{\omega^2 \cdot R_1}{g} \quad (19)$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння,  $9,81 m/s^2$ .

Для визначення умов переходу від одношарового до двошарового руху введено безрозмірний фактор формування плівки у полі відцентрових сил [3]:

$$Hg = Re_{nl(\max)} \cdot Fr_{\min} \quad (20)$$

Фізичний зміст:  $Hg$  являє собою відношення інерційних відцентрових ефектів до в'язких сил у плівці. За малих значень  $Hg$  відцентрова сила достатньою мірою розтоншує плівку, і вона лишається одношаровою. У разі перевищення критичного значення  $Hg_{\text{кр}}$  над першим в'язким підшаром виникає другий шар, формування якого є некерованим і призводить до зростання розміру крапель.

Умова одношарового (раціонального) режиму роботи диспергатора:

$$Hg = Re_{nl(\max)} \cdot Fr_{\min} \leq Hg_{\text{кр}} = 4,0 \cdot 10^4 \quad (21)$$

Для насіннєвого матеріалу з жорсткішою вимогою  $d_{\text{кр}} \leq 50$  мкм необхідне більш суворе обмеження:

$$Hg \leq (3,0 \div 3,5) \cdot 10^4 \rightarrow d_{\text{кр}} \leq 50 \text{ мкм} \quad (22)$$

Ця умова впливає зі співвідношення  $d_{\text{кр}} / \delta_f \approx 4$ : для  $d_{\text{кр}} \leq 50$  мкм необхідна товщина плівки  $\delta_f \leq 12,5$  мкм, що досягається при нижчих значеннях  $Hg$  або підвищеній кутовій швидкості  $\omega$ .

Лінійна швидкість більшої крайки диспергатора:

$$V_{l(\max)} = \omega \cdot R_2 \quad (23)$$

З умови  $Hg \leq Hg_{\text{кр}}$ , підставляючи (15)–(17) у (18) та виражаючи  $\omega$ , отримуємо:

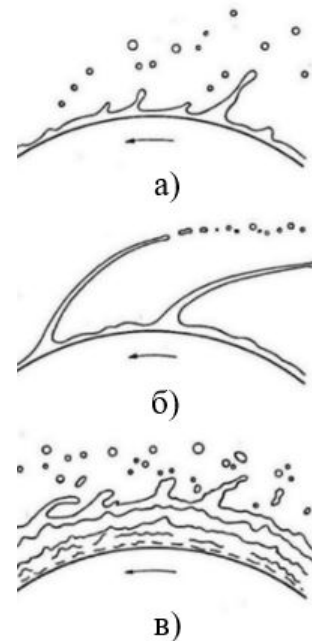
$$\omega \geq \left( \frac{Q_p \cdot g}{2\pi \cdot R_1^2 \cdot \nu_p \cdot Hg_{\text{кр}}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (24)$$

У проектному вигляді – мінімальна лінійна швидкість крайки:

$$V_{l(\max)} \geq R_2 \cdot \left( \frac{Q_p \cdot g}{2\pi \cdot R_1^2 \cdot \nu_p \cdot Hg_{\text{кр}}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (25)$$

Рівняння (25) є проектувальним співвідношенням: за заданими  $Q_p$  та властивостями рідини визначають мінімальну необхідну лінійну швидкість крайки диспергатора.

Для визначення розміру крапель проаналізуємо режими розпилення.



**Рис. 4. Режими формування рідини за крайкою роторного Розпилювача**  
**а – крапельний; б – струменний;**  
**в – плівковий [6]**

При збільшенні витрат  $Q_p$  за незмінної кутової швидкості  $\omega$  послідовно змінюються режими розпилення [1]:

– Режим I – пряма крапля (direct drop): низькі  $Q_p$ , рідина відривається безпосередньо від крайки у вигляді окремих крапель.

– Режим II – лігаментний: при збільшенні  $Q_p$  на крайці формуються нитки (лігаменти), що розпадаються на краплі під дією нестійкості Релея–Тейлора. Розмір крапель  $d_{кр} \approx d_{ліг}$ .

– Режим III – плівковий: великі  $Q_p$  або мала  $\omega$ . Рідина утворює суцільну плівку на крайці, яка нерівномірно розпадається на краплі. Для насінневого матеріалу є небажаним.

Для перфорованої бічної поверхні за раціональних режимів реалізується аналог режиму II з регульованим розміром крапель через зони перфорації.

Для прогнозування діаметру крапель використовується напівемпіричне співвідношення [2]:

$$d_{кр} = C_1 \cdot \delta_f(R_2) \cdot We^{-\frac{1}{3}} \cdot Re^{\frac{1}{6}} \quad (26)$$

де  $C_1$  – емпірична стала ( $C_1 \approx 3,8$  для плоского диска; для перфорованої чаші підлягає уточненню);  $We = \rho_p \cdot V_{л(max)}^2 \cdot \delta_f / \sigma$  – число Вебера;  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу рідини, Н/м.

Для пшеничного зерна умова запобігання агломерації:  $d_{кр} \leq 0,02 \cdot d_{зерна} \approx 50$  мкм (за еквівалентного діаметра зерна  $d_{зерна} \approx 2,5$  мм).

Підставляючи  $\delta_f(R_2)$  з рівняння (5) у (26) та виражаючи  $\omega$ , отримуємо мінімальну кутову швидкість:

$$\omega_{min} = \left( \frac{C_1^3 \cdot \rho_p \cdot Q_p}{\pi \cdot \mu \cdot \cos(\alpha/2) \cdot \sigma \cdot d_{крmax}^3} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (27)$$

Рівняння (27) є основним проектним критерієм: воно визначає мінімальне значення  $\omega$ , при якому  $d_{кр} \leq d_{крmax} = 50$  мкм – умову запобігання агломерації насінневого матеріалу.

Розглянемо також теплову модель з умовами збереження схожості насіння. На відміну від грануляції мінеральних добрив (температура шару 90–95°C), обробка насінневого матеріалу вимагає суворого обмеження  $T \leq 40^\circ\text{C}$ . Теплова модель описує баланс теплоти в зоні зрошення.

Рівняння нестационарного теплообміну для одного зерна в зоні зрошення:

$$m_3 \cdot C_3 \cdot \frac{dT_3}{dt} = \alpha_2 \cdot S_3 \cdot (T_2 - T_3) - q_b \cdot \dot{m}_b \quad (28)$$

де  $m_3$  – маса зерна, кг;  $C_3$  – теплоємність зерна, Дж/(кг·К);  $\alpha_2$  – коефіцієнт тепловіддачі від газу до зерна, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $S_3$  – площа поверхні зерна, м<sup>2</sup>;  $T_2$  – температура теплоносія в зоні зрошення, К;  $q_b$  – питома теплота випаровування, Дж/кг;  $\dot{m}_b$  – швидкість випаровування з поверхні зерна, кг/с.

За усталеного стану ( $\frac{dT_3}{dt} \rightarrow 0$ ) температура поверхні зерна:

$$T_3 = T_2 - \frac{q_b \cdot \dot{m}_b}{\alpha_2 \cdot S_3} \quad (29)$$

Умова збереження схожості насіння:

$$T_3 \leq T_{max} = 40^\circ\text{C} = 313 \text{ K} \quad (30)$$

З рівнянь (29) і (30) знаходимо мінімально необхідну швидкість випаровування:

$$\dot{m}_{bmin} = \frac{\alpha_2 \cdot S_3 \cdot (T_2 - T_{max})}{q_b} \quad (31)$$

Витрата рідини  $Q_p$  пов'язана зі швидкістю випаровування через матеріальний баланс. Якщо  $S_{від}$  – масова частка розчинника в рідкій фазі:

$$\dot{m}_b = \frac{S_{від} \cdot Q_p \cdot \rho_p}{N_3} \quad (32)$$

де  $N_3$  – кількість зерен у зоні зрошення в момент часу  $t$ .

З рівнянь (31) і (32) отримуємо обмеження на максимально допустиму витрату рідини:

$$Q_{pmax} \leq \frac{N_3 \cdot \alpha_2 \cdot S_3 \cdot (T_2 - T_{max})}{q_b \cdot S_{від} \cdot \rho_p} \quad (33)$$

Рівняння (33) є критичним обмеженням: при  $Q_p > Q_{pmax}$  швидкість випаровування недостатня і температура зерна перевищить 40°C. Це обмеження діє спільно з умовою (27) на розмір крапель.

**Результати та дискусії.** Вихідні дані – параметри чашового диспергатора типу 1 [3] з адаптацією до умов обробки насінневого матеріалу пшениці:

Таблиця 1

Вихідні дані для розрахунку

| Параметр                   | Позначення   | Значення             | Одиниці           |
|----------------------------|--------------|----------------------|-------------------|
| Мінімальний радіус чаші    | $R_1$        | 0,020                | м                 |
| Максимальний радіус крайки | $R_2$        | 0,040                | м                 |
| Кут розкриття конуса       | $\alpha$     | 50                   | °                 |
| Частота обертання          | $N$          | 4200                 | об/хв             |
| Кутова швидкість           | $V_{л(max)}$ | 439,8                | рад/с             |
| Лінійна швидкість крайки   | $Q_p$        | 17,6                 | м/с               |
| Об'ємна витрата рідини     | $C_c$        | $3,5 \times 10^{-6}$ | м <sup>3</sup> /с |

| Параметр                       | Позначення        | Значення | Одиниці           |
|--------------------------------|-------------------|----------|-------------------|
| Концентрація сухої речовини    | Cс                | 80       | % мас.            |
| Ефективна в'язкість суспензії  | $\mu_{\text{еф}}$ | 0,015    | Па·с              |
| Густина рідкої фази            | $\rho_p$          | 1220     | кг/м <sup>3</sup> |
| Коефіцієнт поверхневого натягу | $\sigma$          | 0,058    | Н/м               |
| Індекс плинності               | n                 | 0,72     | –                 |
| Коефіцієнт консистентності     | K                 | 0,045    | Па·с <sup>n</sup> |
| Температура теплоносія         | $T_r$             | 55       | °C                |

Результати розрахунків для ньютонівської моделі ( $n = 1$ )

Питомі витрати на радіусі  $R_1$ :

$$Q_v = \frac{3,5 \cdot 10^{-6}}{2\pi \cdot 0,02} = 2,785 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 (\text{м} \cdot \text{с}) \quad (34)$$

Кінематична в'язкість суспензії:

$$\nu_p = \frac{\mu}{\rho} = \frac{0,015}{1220} = 1,23 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{с} \quad (35)$$

Плівковий критерій Рейнольдса:

$$Re_{\text{пл(max)}} = 2,785 \cdot 10^{-5} / 1,23 \cdot 10^{-5} = 2,26 \quad (36)$$

Відцентровий критерій Фруда:

$$Fr_{\text{min}} = (439,8)^2 \cdot 0,02 / 9,81 = 3868 \quad (37)$$

Фактор формування плівки:

$$Hg = 2,26 \cdot 3868 = 8,74 \cdot 10^3 \leq 3,5 \cdot 10^4 \checkmark \quad (38)$$

Висновок:  $Hg = 8,74 \cdot 10^3 < Hg_{\text{кр}} = 4,0 \cdot 10^4$  – одношаровий режим забезпечено, коефіцієнт запасу 4,6.

Товщина плівки на  $R_1$  (за рівнянням 5):

$$\delta_f(R_1) = \left( \frac{3 \cdot 0,015 \cdot 3,5 \cdot 10^{-6}}{\pi \cdot 1220 \cdot (439,8)^2 \cdot 0,02 \cdot 0,906} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 22,7 \text{ мкм} \quad (39)$$

Товщина плівки на  $R_2$ :

$$\delta_f(R_2) = 22,7 \cdot \left( \frac{0,02}{0,04} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 18,0 \text{ мкм} \quad (40)$$

Оцінка розміру крапель (рівняння 24,  $C_1 \approx 4,0$  для перфорованої чаші):

$$We = 1220 (17,6)^2 \cdot 18 \cdot 10^{-6} / 0,058 \approx 115 \quad (41)$$

$$d_{\text{кр}} \approx 4,0 \cdot 18 \cdot (115)^{-\frac{1}{3}} \approx 32 \text{ мкм} \leq 50 \text{ мкм} \quad (42)$$

Висновок:  $d_{\text{кр}} \approx 32 \text{ мкм} < d_{\text{крmax}} = 50 \text{ мкм}$  – умова запобігання агломерації виконана.

Розрахунки з поправкою для псевдопластичної моделі ( $n = 0,72$ ). Для суспензії 80% мас. ( $n = 0,72$ ,  $K = 0,045 \text{ Па} \cdot \text{с}^n$ ) з рівняння (10):

$$\delta_f^{(n)}(R_1) \approx 28,3 \text{ мкм} \text{ (порівняно з } 22,7 \text{ мкм для } n=1) \quad (43)$$

Псевдопластичність суспензії збільшує товщину плівки приблизно на 25%. Відповідно  $d_{\text{кр}(n)} \approx 40 \text{ мкм}$ , що все ж менше 50 мкм. Це підтверджує, що режим  $\omega = 4200 \text{ об/хв}$  залишається раціональним навіть для висококонцентрованих суспензій.

Параметри зерна пшениці:  $m_s = 4 \cdot 10^{-5} \text{ кг}$ ,  $S_s = 5,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$ ,  $C_s = 1800 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ;  $\alpha_{\square} \approx 100 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$  (ПЗШ у режимі СПП),  $q_b = 2,45 \cdot 10^6 \text{ Дж}/\text{кг}$ ;  $S_{\text{від}} = 0,20$  (20% вільної води у суспензії 80% мас.).

Визначення площі поверхні та еквівалентного діаметра зерна пшениці. Насінина пшениці апроксимується еліпсоїдом з напівосями:  $a = 3,2 \text{ мм}$ ,  $b = 1,4 \text{ мм}$ ,  $c = 1,325 \text{ мм}$  (розміри зерна:  $6,4 \times 2,8 \times 2,65 \text{ мм}$  [5]). Площу поверхні еліпсоїда розраховують за формулою Кнуда Томсена (похибка  $\leq 1,061\%$ ):

$$F_{\text{пш}} = 4\pi \cdot ((a^p \cdot b^p + a^p \cdot c^p + c^p \cdot b^p) / 3)^{1/p},$$

де  $p = 1,6075$

$$F_{\text{пш}} = 4\pi \cdot ((3,2^{1,6075} \cdot 1,4^{1,6075} + 3,2^{1,6075} \cdot 1,325^{1,6075} + 1,325^{1,6075} \cdot 1,4^{1,6075}) / 3)^{1/1,6075} \approx 45,86 \text{ мм}^2 = 4,59 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2. \quad (42^*)$$

Об'єм еліпсоїда та еквівалентний діаметр кулі рівного об'єму:

$$V_e = (4/3)\pi abc = (4/3)\pi \cdot 3,2 \cdot 1,4 \cdot 1,325 \approx 24,86 \text{ мм}^3 = 2,49 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3; \quad (42^{**})$$

$$\text{Декв} = (6V_e/\pi)^{1/3} = (6 \cdot 24,86/\pi)^{1/3} \approx 3,62 \text{ мм} = 3,62 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Питома поверхня зерен у шарі (порозність  $\varepsilon_0 = 0,42$ ):

$$\sigma = 6(1 - \varepsilon_0) / \text{Декв} = 6 \cdot (1 - 0,42) / (3,62 \cdot 10^{-3}) \approx 961 \text{ м}^2/\text{м}^3.$$

Уточнена площа поверхні одного зерна  $S_3 = 4,59 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$  (замість  $5,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$  у попередній оцінці). Перерахунок максимально допустимі витрати з уточненим  $S_3$ :

Довжина твірної конуса диспергатора ( $\alpha = 50^\circ$ ,  $R_1 = 20 \text{ мм}$ ,  $R_2 = 40 \text{ мм}$ ):

$$L = (R_2 - R_1) / \text{tg}(\alpha/2) = (40 - 20) / \text{tg}(25^\circ) = 20 / 0,4663 \approx 42,9 \text{ мм} = 0,0429 \text{ м}. \quad (42^{***})$$

Максимально допустима витрата (рівняння 31),  $N_s = 1000$  зерен у зоні зрошення:

$$Q_{\text{pmax}} = 1000 \cdot 100 \cdot 4,59 \cdot 10^{-5} \cdot (328 - 313) / (2,45 \cdot 10^6 \cdot 0,20 \cdot 1220) = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с} \quad (44)$$

Висновок:  $Q_p = 3,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с} \ll Q_{\text{pmax}} = 1,15 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}$  – тепловий режим  $T_s < 40^\circ\text{C}$  забезпечено з запасом  $\sim 3,3$ .

Таблиця 2

**Зведені результати та порівняння моделей**

| Критерій / параметр       | Модель n=1<br>(ньютонівська) | Модель n=0,72<br>(суспензія) | Допустиме<br>значення  |
|---------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------|
| $Re_{пл(max)}$            | 2,26                         | –                            | –                      |
| $Fr_{min}$                | 3868                         | 3868                         | –                      |
| $Hg$                      | $8,74 \times 10^3$           | $8,74 \times 10^3$           | $\leq 4,0 \times 10^4$ |
| $\delta_r(R_1)$ , мкм     | 22,7                         | 28,3                         | $\leq 50$              |
| $\delta_r(R_2)$ , мкм     | 18,0                         | 22,5                         | $\leq 50$              |
| $We$                      | 115                          | 143                          | –                      |
| $d_{кр}$ , мкм            | $\approx 32$                 | $\approx 40$                 | $\leq 50$ ✓            |
| Режим плівки              | Одношаровий ✓                | Одношаровий ✓                | Одношаровий            |
| $T_3$ (оцінка)            | $< 35^\circ C$ ✓             | $< 35^\circ C$ ✓             | $\leq 40^\circ C$      |
| $Q_p / Q_{pmax}$ (оцінка) | 0,24                         | 0,24                         | $\leq 1,0$ ✓           |

Отримані результати показують, що врахування псевдопластичних властивостей суспензії є принципово важливим для коректного прогнозування товщини плівки та розміру крапель. Порівняно з ньютонівською моделлю для  $n = 0,72$  розрахункова товщина плівки зростає приблизно на 25%, проте за режиму  $N = 4200$  об/хв і  $Q = 3,5 \times 10^{-6}$  м<sup>3</sup>/с критерій  $Hg$  залишається меншим за граничне значення, а розмір крапель не перевищує 50 мкм. Це свідчить про можливість використання запропонованої моделі для вибору раціональних режимів роботи чашового диспергатора при передпосівному обробленні насіння висококонцентрованими суспензіями. Водночас остаточна верифікація моделі потребує експериментального підтвердження спектра крапель і температури поверхні насіння в реальних умовах псевдозрідженого шару.

**Висновки.** На підставі виконаного аналізу можна сформулювати такі основні висновки. На відміну від праці Любеки А.М. (2021), де модель верифіковано для однокомпонентних розчинів (сульфат амонію, 40% мас.), запропонована модель поширюється на гетерогенні суспензії з вмістом сухої речовини до 80% та адаптована до умов термолабільного насіннєвого матеріалу ( $T_{max} = 40^\circ C$ ).

Запропонована математична модель ґрунтується на рівнянні балансу відцентрової та в'язкої сил для конічної поверхні і поширює

модель [3] на псевдопластичні рідини. Модель дає відповідь на поставлену задачу – опис руху рідини в чашовому диспергаторі – з урахуванням геометрії конуса, режиму обертання та реологічних властивостей оброблюваної суспензії.

Критерій  $Hg = Re_{пл} \cdot Fr_{min}$  є ключовим показником режиму плівки. При  $Hg \leq 3,5 \times 10^4$  забезпечується  $d_{кр} \leq 50$  мкм – умова запобігання агрегації насіннєвого матеріалу.

Врахування псевдопластичності суспензії ( $n = 0,72$ ) збільшує розрахункову товщину плівки приблизно на 25% порівняно з ньютонівською моделлю, що вимагає відповідного коригування кутової швидкості  $\omega$  або витрати  $Q_p$  при проектуванні.

Теплова модель підтверджує, що за температури теплоносія  $T_e = 55^\circ C$  і стандартної витрати рідини температура поверхні зерна не перевищує  $35^\circ C$ , тобто умова збереження схожості виконується з чотириразовим запасом.

Режим  $\omega = 4200$  об/хв ( $Vл = 17,6$  м/с) забезпечує одношаровий рух плівки і  $d_{кр} \leq 50$  мкм навіть для суспензій з 80% вмістом сухої речовини.

Перспективи подальших досліджень полягають в експериментальній верифікації запропонованої моделі для суспензій різного складу, уточненні емпіричної сталої у співвідношенні для визначення діаметра крапель, а також в оптимізації геометрії перфорації чашового диспергатора.

**ЛІТЕРАТУРА:**

1. Shehata M. Characteristics of the Rotary Cup Atomizer. 2003. Vol. 7. P. 55–74.
2. Sahu S., Chakraborty A., Maurya D. Coriolis-induced liquid breakup and spray evolution in a rotary slinger atomizer: Experiments and Analysis. *International Journal of Multiphase Flow*. 2020. Vol. 135. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103532>.

3. Любека А. М. Розробка та дослідження чашового ротаційного диспергатора для апаратів з псевдо-зрідженим шаром : дис. ... канд. техн. наук : 05.17.08 / КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ, 2021. 165 с.
4. Вітенько Д. О., Зварич Н. М. Гідродинамічні та кавітаційні характеристики статичних моделей апаратів зі змінною конфігурацією вхідного каналу. *Mechanics and Advanced Technologies*. 2025. Vol. 9, No. 1(104). P. 73–82. DOI: [https://doi.org/10.20535/2521-1943.2025.9.1\(104\).318233](https://doi.org/10.20535/2521-1943.2025.9.1(104).318233).
5. Баган А. В., Шакалій С. М., Барат Ю. М. Формування насінневої продуктивності нуту залежно від сорту та інокуляції насіння. *Таврійський науковий вісник*. 2020. № 111. С. 14–21. DOI: <https://doi.org/10.32851/22260099.2020.111.2>.
6. Lefebvre A., McDonnell V. Atomization and Sprays. 2017. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781315120911>.
7. Kieckhefer P., Pietsch-Braune S., Heinrich S. Product-Property Guided Scale-Up of a Fluidized Bed Spray Granulation Process Using the CFD-DEM Method. *Processes*. 2022. Vol. 10. Art. 1291. DOI: <https://doi.org/10.3390/pr10071291>.
8. Wurster D. Air-Suspension Technique of Coating Drug Particles—A Preliminary Report. *Journal of the American Pharmaceutical Association*. 2006. Vol. 48. P. 451–454. DOI: <https://doi.org/10.1002/jps.3030480808>.
9. Cantor S., Augsburger L., Hoag S., Gerhardt A. Pharmaceutical Granulation Processes, Mechanism and the Use of Binders. 2008. DOI: <https://doi.org/10.1201/b15115-9>.
10. Malagutti L., Mazzanti V., Mollica F. A MATLAB-Based Software for Estimating Measurement Uncertainties in Capillary Viscometry. *Macromolecular Symposia*. 2022. Vol. 405. Art. 2100401. DOI: <https://doi.org/10.1002/masy.202100401>.
11. Корнієнко Я. М. Процеси та обладнання хімічної технології : підручник. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. Ч. 2. 400 с.
12. Li H. Fluidization science and technology at institute of process engineering-60th anniversary celebration for the foundation of Institute of Process Engineering. *Guocheng Gongcheng Xuebao / The Chinese Journal of Process Engineering*. 2018. Vol. 18. P. 657–668. DOI: <https://doi.org/10.12034/j.issn.1009-606X.218192>.
13. Pospelova A. Сучасні аспекти і технології у захисті рослин : Матеріали VI Міжнародної наук.-практ. інтернет-конференції (2024). DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.14534615>.

#### REFERENCES:

1. Shehata, M. (2003). Characteristics of the rotary cup atomizer. 7. 55-74.
2. Sahu, S., Chakraborty, A., & Maurya, D. (2020). Coriolis-induced liquid breakup and spray evolution in a rotary slinger atomizer: Experiments and analysis. *International Journal of Multiphase Flow*, 135. <https://doi.org/10.1016/j.ijmultiphaseflow.2020.103532>
3. Liubeka, A. M. (2021). Rozrobka ta doslidzhennia chashovoho rotatsiinoho dyspersatora dlia aparativ z psevozridzhenym sharom [Development and research of a cup rotary disperser for fluidized bed apparatuses] (Candidate's thesis). KPI im. Ihoria Sikorskoho, Kyiv, Ukraine. [in Ukrainian].
4. Vitenko, D. O., & Zvarych, N. M. (2025). Hidrodinamichni ta kavitatsiini kharakterystyky statychnykh modelei aparativ zi zminnoiu konfiguracyieiu vkhidnoho kanalu [Hydrodynamic and cavitation characteristics of static models of apparatuses with variable inlet channel configuration]. *Mechanics and Advanced Technologies*, 9(1(104)), 73–82. [https://doi.org/10.20535/2521-1943.2025.9.1\(104\).318233](https://doi.org/10.20535/2521-1943.2025.9.1(104).318233) [in Ukrainian].
5. Bahan, A. V., Shakalii, S. M., & Barat, Yu. M. (2020). Formuvannia nasinnievoi produktyvnosti nutu zalezno vid sortu ta inokulatsii nasinnia [Formation of chickpea seed productivity depending on variety and seed inoculation]. *Tavriiskyi Naukovyi Visnyk*, 111, 14–21. <https://doi.org/10.32851/22260099.2020.111.2> [in Ukrainian].
6. Lefebvre, A. H., & McDonnell, V. G. (2017). Atomization and sprays. CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9781315120911>
7. Kieckhefer, P., Pietsch-Braune, S., & Heinrich, S. (2022). Product-property guided scale-up of a fluidized bed spray granulation process using the CFD-DEM method. *Processes*, 10, 1291. <https://doi.org/10.3390/pr10071291>
8. Wurster, D. E. (2006). Air-suspension technique of coating drug particles—A preliminary report. *Journal of the American Pharmaceutical Association*, 48, 451–454. <https://doi.org/10.1002/jps.3030480808>
9. Cantor, S. L., Augsburger, L. L., Hoag, S. W., & Gerhardt, A. (2008). Pharmaceutical granulation processes, mechanism and the use of binders. <https://doi.org/10.1201/b15115-9>
10. Malagutti, L., Mazzanti, V., & Mollica, F. (2022). A MATLAB-based software for estimating measurement uncertainties in capillary viscometry. *Macromolecular Symposia*, 405, 2100401. <https://doi.org/10.1002/masy.202100401>
11. Korniienko, Ya. M. (2022). Protsesy ta obladnannia khimichnoi tekhnolohii [Processes and equipment of chemical technology] (Part 2). Kyiv: KPI im. Ihoria Sikorskoho. [in Ukrainian].
12. Li, H. (2018). Fluidization science and technology at institute of process engineering—60th anniversary celebration for the foundation of Institute of Process Engineering. *The Chinese Journal of Process Engineering*, 18, 657–668. <https://doi.org/10.12034/j.issn.1009-606X.218192>
13. Pospelova, A. (2024). Suchasni aspekty i tekhnolohii u zachysti roslin [Modern aspects and technologies in plant protection]. In *Materialy VI Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi internet-konferentsii*. <https://doi.org/10.5281/zenodo.14534615> [in Ukrainian].



Стаття поширюється на умовах  
ліцензії відкритого доступу  
CC BY 4.0

Дата першого надходження статті до видання: 17.04.2026  
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 12.05.2026  
Дата публікації (оприлюднення) статті: 30.05.2026