

УДК 622. 771:622.341]:519.6

DOI <https://doi.org/10.32782/3041-2080/2025-5-32>

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АПАРАТУ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ ГІДРОДИНАМІКИ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ГРАВІТАЦІЙНОГО ЗБАГАЧЕННЯ МАГНЕТИТОВИХ РУД У СПІРАЛЬНИХ СЕПАРАТОРАХ

Олійник Тетяна Анатоліївна,

доктор технічних наук, професор,
завідувачка кафедрою збагачення корисних копалин та хімії
Криворізького національного університету
ORCID ID: 0000-0002-0315-7308

Скляр Людмила Василівна,

кандидат технічних наук,
доцент кафедри збагачення корисних копалин та хімії
Криворізького національного університету
ORCID ID: 0000-0002-2721-1436

Румницький Дмитро Олександрович,

аспірант кафедри збагачення корисних копалин та хімії
Криворізького національного університету
ORCID ID: 0009-0006-4087-2868

На прикладі визначення швидкості вільного та стисненого падіння частинок встановлена можливість використання методів обчислювальної гідродинаміки для моделювання процесу осадження мінеральних частинок у рідині та визначення швидкості їх падіння. Показано, що ефективність розділення у спіральних сепараторах суттєво залежить від взаємозв'язку розміру та густини частинок. Збільшення діаметра частинок зменшує вплив турбулентних коливань потоку, що сприяє стабілізації їх траєкторій і забезпечує більш чіткий поділ фракцій. Проведене чисельне моделювання із застосуванням методу скінченних елементів (FEM) у середовищі FreeFEM++ дало змогу визначити гідродинамічні та кінематичні характеристики потоку, які можуть бути використані для оптимізації конструктивних параметрів та режимів роботи спіральних сепараторів задля підвищення селективності процесу гравітаційного збагачення магнетитових руд. Побудова тривимірної моделі потоку відкрила можливості для детального аналізу зон турбулентності, локального збагачення та розподілу концентрацій по ширині каналу. Такі дослідження можуть бути розширені у програмних комплексах OpenFOAM або COMSOL, що підтримують обмін даними з FreeFEM++ через формат mesh-файлів. Результати моделювання були підтверджені фізичними експериментами на спіральному сепараторі СВШ-2-1000, який має параболічну геометрію поперечного перерізу, та сепараторі лабораторного масштабу з профілем поперечного перерізу у вигляді кривої слабо похилої. Лабораторний сепаратор забезпечує отримання концентрату з вищими показниками виходу, вмісту та вилучення магнетиту (до 85,4 %). Втрати магнетиту з хвостами становили 12,5 % для лабораторного апарата СВШ-2-1000 і не перевищували 3 %. Отримані результати свідчать про високу узгодженість чисельних розрахунків і експериментальних даних. Підтверджують перспективність використання обчислювальної гідродинаміки для дослідження та оптимізації процесів гравітаційного збагачення у спіральних сепараторах.

Ключові слова: гравітаційне збагачення, спіральний сепаратор, магнетитові руди, чисельне моделювання, обчислювальна гідродинаміка, FreeFEM++, FEM, турбулентність, сегрегація частинок.

Oliinyk Tetiana, Skliar Liudmyla, Rumnytskyi Dmytro. Application of the mathematical framework of computational fluid dynamics for the investigation of gravity concentration processes of magnetite ores in spiral separator

Using the example of determining the velocity of free and hindered settling of particles, the feasibility of applying computational fluid dynamics methods has been established for modelling the process of sedimentation of mineral particles in a fluid and for determining their settling velocity. The separation efficiency in spiral concentrators is strongly influenced by the interplay between particle size and density. An increase in particle diameter reduces the impact of flow turbulence, stabilizing particle trajectories and enabling a clearer fraction separation. Numerical modelling using the finite element method (FEM) in FreeFEM++ was employed to determine the hydrodynamic and kinematic characteristics of the flow, which can be used to optimize both the design parameters and operational regimes of spiral concentrators to enhance the selectivity of gravity separation of magnetite ores. The development of a three-dimensional flow model has enabled detailed analysis of turbulence zones, local enrichment areas,

and concentration distribution across the channel width. These studies can be further extended using OpenFOAM or COMSOL software, both of which are compatible with FreeFEM++ through mesh file exchange. The simulation results were validated by physical experiments conducted on the SVSh-2-1000 spiral separator, which features a parabolic cross-section geometry, and on a laboratory-scale separator with a cross-section profile in the form of a gently inclined curve. The laboratory concentrator produced a concentrate with higher yield, magnetite content, and recovery (up to 85.4 %). Magnetite losses in tailings were 12.5 % for the laboratory unit SVSh-2-1000 and did not exceed 3 %. The obtained results demonstrate a strong correlation between numerical predictions and experimental data, confirming the high potential of computational fluid dynamics in investigating and optimizing gravity separation processes in spiral concentrators.

Key words: gravity concentration, spiral concentrator, magnetite ores, numerical modelling, computational fluid dynamics, FreeFEM++, FEM, turbulence, particle segregation.

Вступ. Гравітаційне збагачення магнетитових руд у спіральних сепараторах залишається одним з ключових напрямів підвищення ефективності переробки залізорудної сировини. Оптимізація цього процесу вимагає глибокого розуміння гідродинаміки багатофазних потоків та механізмів сегрегації частинок різної густини у тонкошаровому спіральному потоці. Використання математичного апарату обчислювальної гідродинаміки (CFD) дає змогу досліджувати просторово-часові характеристики течії, розподіл швидкостей, тисків та концентрацій твердих частинок без потреби у масштабних фізичних експериментах. Особливої актуальності набуває моделювання процесу осадження частинок у спіральних сепараторах, що дає змогу прогнозувати параметри сегрегації та визначати вплив конструктивних та режимних факторів на якість концентрату.

Попри значний прогрес у застосуванні CFD для гідравлічних задач, моделювання спіральної сепарації магнетитових руд залишається складним через поєднання криволінійної геометрії апарата, багатофазності середовища та наявності взаємодії частинок з турбулентним потоком. Більшість комерційних CFD-пакетів є ресурсомісткими, а їхнє використання обмежене високою вартістю та складністю адаптації під специфічні фізико-математичні моделі, зокрема моделі осадження частинок з урахуванням підйомних сил, в'язкості пульпи та міжфазних взаємодій.

Вибір чисельного підходу та реалізації. Використання середовища FreeFEM++ у поєднанні з бібліотеками UMFPACK та GMRES (з ILU-попереднім обчисленням) забезпечує баланс між точністю, обчислювальною ефективністю та гнучкістю реалізації. UMFPACK дає змогу ефективно розв'язувати великі розріджені системи рівнянь, що виникають під час дискретизації рівнянь Нав'є – Стокса та рівнянь переносу частинок. Алгоритм GMRES з неповним LU-розкладом як передобчисленням дає змогу пришвидшити збіжність під час моделювання складних тривимірних турбулентних багатофазних потоків, зменшуючи обчислювальні витрати.

Такий підхід робить можливим реалізацію розрахункових моделей, що адекватно описують динаміку осадження та сегрегації мінеральних частинок у спіральних сепараторах, і може бути адаптований до задач оптимізації конструкцій та режимів гравітаційного збагачення магнетитових руд.

Мета дослідження. Розробити та реалізувати математичну модель процесу гравітаційного збагачення магнетитових руд у спіральних сепараторах з урахуванням осадження частинок, що забезпечує підвищену точність прогнозування параметрів сегрегації на основі чисельних методів обчислювальної гідродинаміки, реалізованих у середовищі FreeFEM++ з використанням бібліотек UMFPACK і GMRES з ILU-передобчисленням.

Завдання дослідження. Провести аналіз наявних моделей гідродинаміки багатофазних потоків та процесів сегрегації у спіральних сепараторах, визначити їхні переваги та обмеження.

Сформулювати математичну постановку задачі, що включає рівняння нерозривності, збереження імпульсу, турбулентної кінетичної енергії та баланс сил, які діють на мінеральні частинки під час спіральної сепарації.

Розробити чисельну схему дискретизації рівнянь з урахуванням криволінійної геометрії жолоба та багатофазної взаємодії середовища.

Реалізувати модель у FreeFEM++ з використанням UMFPACK для ефективного розв'язання розріджених систем рівнянь та GMRES з ILU-передобчисленням для прискорення збіжності і зменшення обчислювальних витрат.

Провести серію чисельних експериментів для дослідження впливу геометричних та режимних параметрів сепаратора на ефективність осадження та сегрегації частинок.

Порівняти результати моделювання з даними експериментальних досліджень та опублікованими в літературі результатами для валідації запропонованої моделі.

Розробити рекомендації щодо оптимізації конструкцій спіральних сепараторів та режимів

гравітаційного збагачення магнетитових руд на основі результатів моделювання.

Аналіз попередніх досліджень і публікацій. Використання математичного апарату обчислювальної гідродинаміки (CFD) для дослідження процесів гравітаційного збагачення магнетитових руд у спіральних сепараторах отримало значний розвиток упродовж останніх десятиліть. Вони дають змогу отримати детальну інформацію про розподіл швидкостей, тиску, турбулентних характеристик та траєкторій частинок у робочому руслі сепаратору [1].

Перші роботи були зосереджені на спрощених моделях течії, які давали змогу дослідити вплив геометричних параметрів і початкових умов на ефективність розділення та базувалися на використанні моделі Ейлера–Ейлера та методу скінченних об'ємів, які забезпечували опис багатозфазних потоків, але мали обмеження через міжфазну дифузію та спрощений опис меж поділу фаз. Зокрема, Matthews, Fletcher та Partridge (1998) виконали чисельне моделювання руху рідини та розріджених частинок у спіральних сепараторах, продемонструвавши можливості обчислювальних методів (CFD) для опису складних гідродинамічних полів та формування плівкового потоку [2]. Проте точність прогнозування поведінки твердих частинок була обмеженою.

Подальший розвиток методів відзначався переходом до мультифлюїдних ейлерових моделей з підходом VOF (Volume of Fluid), які забезпечували чітке відтворення меж поділу середовищ та більш коректне відображення плівкових потоків у жолобі спіралі. Lingguo Meng et al. показали, що використання VOF-моделі дає змогу ефективно уникати міжфазної дифузії та точніше прогнозувати товщину плівки до і після введення твердих частинок [3].

Окрему увагу у сучасних дослідженнях приділено моделюванню підйомної сили Бagnol'да, яка впливає на сегрегацію частинок різної густини у радіальному та вертикальному напрямках. Kwon et al. та Ye et al. довели, що врахування цього ефекту підвищує точність прогнозування якості концентрату [4; 5]. Інтерес дослідників також був зосереджений на впливі конструктивних параметрів спірального сепаратора на формування потоку. Ye та ін. (2022) за допомогою CFD дослідили зміну гідродинаміки потоку під час варіації кута нахилу, ширини та форми поперечного профілю жолоба, виявивши суттєвий вплив цих параметрів на ефективність розділення [5]. У контексті магнетитових руд вітчизняні дослідження (Олійник та ін., 2025) з визначення впливу в'язкості пульпи на

ефективність процесу збагачення у гвинтових сепараторах показали, що в'язкість пульпи суттєво впливає на процес гравітаційного збагачення магнетитових руд, зокрема на швидкість сегрегації та якість отриманого концентрату [6]. При цьому використовувалися експериментальні дані для валідації CFD-моделей, що показали зміну гідродинамічної структури потоку.

Особливу увагу останніми роками приділено впровадженню високопродуктивних чисельних алгоритмів у відкритих програмних середовищах. Li, Zhang та Chen (2021) реалізували CFD-моделювання роботи спіральних сепараторів у середовищі FreeFEM++, використовуючи бібліотеки UMFPACK для прямого розв'язання великих розріджених систем лінійних рівнянь та GMRES з ILU-передобчисленням для ітераційного розв'язання задач великої розмірності. Такий підхід дав змогу ефективно масштабувати розрахунки та суттєво скоротити час обчислень за збереження високої точності результатів [7].

Сучасні моделювання збагачення також включають паралельні чисельні методи та вирішення рівнянь Нав'є–Стокса з турбулентними моделями RNG $k-\varepsilon$, що дає можливість відтворювати реальні умови експлуатації спіральних сепараторів. У цьому контексті використання FreeFEM++ з бібліотеками UMFPACK (прямі розв'язувачі) та GMRES з ILU-попереднім обчисленням (ітераційні методи) є перспективним для забезпечення стійкості та швидкодії розрахунків під час моделювання складних тривимірних потоків.

Узагальнений аналіз раніше виконаних досліджень застосування CFD у спіральних сепараторах наведено у табл. 1.

Отже, сучасні наукові публікації демонструють, що математичне моделювання з використанням CFD та багатозфазних підходів, зокрема VOF, SPH та модифікованих ейлерових моделей, є ефективним інструментом для аналізу та оптимізації роботи спіральних сепараторів. Використання FreeFEM++ у поєднанні з продуктивними чисельними бібліотеками, такими як UMFPACK і GMRES (з ILU-передобчисленням), відкриває додаткові можливості для моделювання складних процесів осадження частинок, враховуючи як геометричні особливості обладнання, так і фізико-хімічні властивості збагачуваного матеріалу.

Методи та методики дослідження. Було виконано моделювання осадження частинок у спіральному сепараторі. При цьому враховано складну геометрію потоку, змінної концентрації твердої фази та взаємодію між компонентами.

Таблиця 1

Аналіз раніше виконаних досліджень застосування CFD у спіральних сепараторах

№	Автори, рік	Модель / метод CFD	Об'єкт дослідження	Основні результати	Джерело
1	Matthews et al., 1997	Ейлер – Ейлер, метод скінченних об'ємів	Гідродинаміка плівкового потоку у спіралі	Визначено розподіл швидкостей і тиску, але низька точність опису сегрегації	[2]
2	Lingguo Meng et al., 2020	Eulerian Multifluid VOF, RNG $k-\varepsilon$	Плівковий потік у спіральному сепараторі	Уникнення міжфазної дифузії, точний прогноз товщини плівки; узгодження з літературними даними	[3]
3	Kwon et al., 2018	CFD з урахуванням підйомної сили Багнольда	Радіальна та вертикальна сегрегація	Підвищення точності прогнозування якості концентрату	[4]
4	Ye et al., 2019	Ейлерова модель з модифікацією силових рівнянь	Сегрегація частинок кварцу та магнетиту	Покращене вертикальне розшарування; умови для радіальної сегрегації	[5]
5	Олійник та ін., 2023	CFD + експериментальна валідація	Магнетитова пульпа у спіралі	Вплив в'язкості на швидкість осадження та структуру потоку	[6]
6	Li et al., 2021	CFD з паралельним розв'язанням (FreeFEM++, UMFPACK, GMRES ILU)	Повний цикл моделювання спіралі	Підвищення швидкодії та стабільності розрахунків у 3D	[7]

Було розглянуто декілька підходів:

- метод скінченних різниць (FDM);
- метод скінченних об'ємів (FVM);
- метод скінченних елементів (FEM).

Аналіз цих підходів показав, що FDM має обмеження у складних геометріях. FVM широко застосовується у комерційних пакунках (наприклад, ANSYS Fluent), проте важко адаптується до задач із сильно варіативною в'язкістю. FEM є найбільш гнучким для геометрії спірального сепаратора та адаптивного уточнення розв'язку. Тому було вибрано FEM на основі FreeFEM++.

Загальна система рівнянь такого моделювання включала:

- рівняння Нав'є–Стокса;
- рівняння неперервності;
- транспортне рівняння для концентрації частинок С.

Система розв'язувалась покроково у вигляді послідовного алгоритму типу operator- splitting, а саме:

- розв'язання рівняння Нав'є–Стокса для швидкості за фіксованого тиску;
- виправлення тиску з урахуванням умови не стискання;
- розв'язання транспортного рівняння для концентрації частинок С з урахуванням переносу та дифузії;
- оновлення в'язкості $\mu(C)$ і перехід до наступного кроку.

Реалізація була виконана у FreeFEM++ на сітках розміром від 4 000 до 12 000 елементів, з автоматичним регенеруванням сітки у разі появи осередків з надмірною деформацією швидкісного поля. Розв'язання

задач здійснювалось за допомогою бібліотек UMFPACK і GMRES (з ILU-перед обчисленням).

Граничні умови й чисельні налаштування були такі.

Геометрія: тривимірна CAD-модель спіралі з реальними розмірами каналу.

Вхідна умова: встановлений швидкісний профіль або витрата суспензії (velocity inlet / mass flow inlet).

Вихід: вихід за фіксованого тиску (pressure outlet).

Стіни: умова noslip; у зонах контакту – стенд-стратегія для моделі частинок (випадок прилипання або відскакування).

Сітка: неструктурована або гібридна сітка з локальним тонким шару біля стінок ($y^+ < 1 \dots 30$, залежно від вибраного під-моделювання стінкового шару). Рекомендований розмір елементу: дослідження незалежності сітки (grid convergence) – мінімум 2 рівні сітки.

Розв'язувач: тиск – швидкість (SIMPLE/PISO залежно від нерухомості/неусталеності течії), другий порядок за просторовими похідними.

Турбулентність: RNG $k-\varepsilon$ з використанням підмоделі від стінки (wall functions) або low-Re підходу за малих y^+ .

Частинки: статистично значуща кількість частинок для трекінгу (наприклад, $\geq 10^4$) з пакетною абсорбцією для зменшення шуму; час інтегрування адаптивний (абсолютна та відносна точність: $10^{-6} \dots 10^{-5}$).

Критерії збіжності: залишки (residuals) $< 10^{-5}$ для основних змінних, стабілізація ключових інтегрованих величин (витрата, накопичення частинок).

Постобробка і валідація включали порівняння модельних і експериментальних профілів концентрації/швидкості. Виконувалась оцінка похибки: відносна похибка між модельними та експериментальними значеннями не повинна перевищувати прийнятний інженерний поріг. Чутливість рішення до параметрів така: швидкість подачі, в'язкість, щільність частинок, розмір сітки, вибір моделі турбулентності.

Згодом CFD-моделювання проводили за ідентичних умов експлуатації та структурних параметрів експерименту з використанням спірального сепаратора СВШ-2-1000 та сепаратору лабораторного масштабу. Сепаратори відрізняються профілем поперечного перерізу. Сепаратор СВШ-2-1000 має параболичну геометрію поперечного перерізу, а сепаратор лабораторного масштабу – профіль поперечного перерізу у вигляді слабко похилої кривої.

Методика моделювання.

Моделювання течії в спіральному сепараторі проводилось за допомогою рівнянь Нав'є–Стокса для турбулентної течії (модель $RNG\ k-\varepsilon$):

$$\rho_f(\bar{u}\nabla)\bar{u} = -\nabla p + \mu_f \nabla^2 \bar{u} + \rho_f \bar{g}_{\text{еф}}, \quad (1)$$

де ρ_f – густина рідини ($\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$),

$\bar{u}$ – вектор швидкості рідини ($\text{м} \cdot \text{сек}^{-1}$),

Δp – тиск (Па),

μ_f – в'язкість суспензії;

$\bar{g}_{\text{еф}}$ – ефективне прискорення ($\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$), що включає дію гравітації та відцентрових прискорень у спіральній геометрії.

Рівняння описує конвективний перенос імпульсу рідини. Перший член правої частини ($-\nabla p$) – градієнт тиску; другий $\mu_f \nabla^2 \bar{u}$ – в'язкісні сили; третій – об'ємні сили (гравітація + ефект відцентрового поля, у разі моделювання у нерухомій або обертовій системі координат може бути використано відповідний додатковий член).

Для замкнення системи рівнянь застосовано модель $RNG\ k-\varepsilon$, яка добре відтворює середні характеристики турбулентних протікань у каналах та витках, має кращу поведінку за великих градієнтів швидкості та вологих зонах біля стінок порівняно з класичним $k-\varepsilon$.

Модель частинок.

Траєкторії частинок розраховувалися за Lagrangian Particle Tracking (DPM – Discrete Phase Model). Для кожної частинки вирішувалося рівняння руху:

$$m_p \frac{dv_p}{dt} = F_D + F_G + F_C + F_B +, \quad (2)$$

де основні сили: F_D – сила опору (Drag), що залежить від числа Рейнольдса частинки;

F_G – сила тяжіння ($m_p \cdot g$); F_C – відцентрова сила (у разі моделювання в обертовій системі або радіального прискорення потоку); F_B – сила Архімеда (підйомна), за потреби коригується для щільності частинки й рідини.

Враховано взаємодію частинок зі стінками (імпакт, відображення або налипання залежно від налаштувань) та можливість агрегації (за потреби).

Надалі виконувалося визначення параметрів в'язкості.

В'язкість рідини-носія $\mu(C, T)$ у моделі визначалася як функція концентрації твердих частинок C та температури T за емпіричною залежністю:

$$\mu_f(C, T) = \mu_0 (1 + \alpha C^m) e^{\beta(T_0 - T)}, \quad (3)$$

де C – об'ємна концентрація твердих частинок; T – температура рідини, К;

T_0 – еталонна температура, К;

μ_0 – динамічна в'язкість чистої рідини за температури T_0 , $\text{Па} \cdot \text{сек}$;

α, m, β – емпіричні коефіцієнти, що визначають вплив концентрації та температури на в'язкість.

Така форма залежності врахувала як збільшення в'язкості з ростом вмісту твердих частинок, так і експоненційне зменшення в'язкості за підвищення температури.

Ефективна швидкість осадження частинок v_s обчислювалася за модифікованим рівнянням Стокса з урахуванням ефективного прискорення потоку:

$$v_s = \frac{(\rho_p - \rho_f) g_{\text{еф}} d_p^2}{18\mu_f}, \quad (4)$$

де v_s – ефективна швидкість осадження частинки, $\text{м} \cdot \text{сек}^{-1}$,

ρ_p – густина частинки, $\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$,

ρ_f – густина рідини, $\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$,

$g_{\text{еф}}$ – ефективне прискорення (з урахуванням відцентрової сили у спіралі), $\text{м} \cdot \text{сек}^{-2}$,

d_p – еквівалентний діаметр частинки, м,

μ_f – динамічна в'язкість суспензії за заданих C та T , $\text{Па} \cdot \text{с}$.

Ця залежність дала змогу врахувати вплив змінної в'язкості (формула 1) на процес осадження, що особливо важливо для гідросепараторів з широким діапазоном концентрацій та температур.

В'язкість змінювалася на кожному кроці залежно від локальної концентрації.

Було враховано багатозфазну течію з перенесенням масової частки частинок. Залежність в'язкості від концентрації враховувалась на кожному кроці розрахунку.

Розрахунки за моделлю проводились у середовищі FreeFEM++ з використанням імпліцитної схеми на неструктурованій сітці. Для тиску застосовувався метод Пенальті, а для швидкості – квадратичні базисні функції. В'язкість оновлювалась на кожному ітераційному кроці залежно від концентрації, що дало змогу врахувати ефекти загущення. Застосовувались такі граничні умови: швидкість на вході: $u_{in} = 0.1$ м/с, нековзання на стінках, нульовий градієнт на виході.

Для часової дискретизації було застосовано імпліцитну схему з центральним різницюванням, яка має добру стійкість для в'язкопружних систем і дає змогу робити кроки по часу до $\Delta t = 10^{-3}$ без втрати точності.

Часовий цикл включав такі етапи:

- побудова поточної матриці жорсткості з урахуванням змінної в'язкості;
- розв'язання задачі для вектору швидкості $\vec{u}$;
- оновлення тиску p з використанням умов нестискання;
- обчислення локального поля в'язкості на основі концентрації частинок.

Область обчислень моделювалась у вигляді плоского зрізу спірального жолоба. Для дискретизації області була побудована неструктурована трикутна сітка, яка забезпечує локальне згущення у критичних зонах, де відбувається найбільше накопичення частинок.

Для апроксимації швидкості течії використовувалися квадратичні базисні функції (елементи другого порядку), що дало змогу підвищити точність обчислень. Тиск апроксимувався лінійними базисними функціями з використанням методу Пенальті. Такого підходу достатньо для стійкості розв'язання задачі Нав'є–Стокса у разі змінної в'язкості.

Параметри моделювання розділення магнетиту та кварцу в спіральному сепараторі були прийняті такі: густина води: $\rho_f = 1\,000$ кг/м³, густина магнетиту: $\rho_m = 5\,100$ кг/м³, густина кварцу: $\rho_q = 2\,650$ кг/м³, температура: $T = 30$ °С, концентрація твердої фази: $C = 35$ %, динамічна в'язкість: $2.1 \cdot 10^{-3}$ Па · с, кут нахилу сепаратора: $\alpha = 6^\circ$, ефективне прискорення: $g_{eff} = 1.025$ м/с².

Однією з ключових особливостей реалізації стало врахування залежності динамічної в'язкості від концентрації твердої фази, що відображає ефект потовщення суспензії. Згідно із запропонованою моделлю, в'язкість визначалась за такою формулою:

$$\mu(C) = \mu_0(1 + \alpha C^n), \quad (5)$$

де μ_0 – динамічна в'язкість чистої рідини (води), α та n – емпіричні параметри, встановлені експериментально ($\alpha = 3.75$, $n = 2.1$),

C – локальна концентрація твердих частинок.

Для реалістичного опису пульпи застосовано модель в'язкості суспензії μ_f у стиснених умовах:

$$\mu_f = \mu_0(1 + 2.5\varphi + 10.5\varphi^2 + 0.00273 \exp(16.6\varphi)), \quad (6)$$

де μ_0 – в'язкість чистої води, φ – об'ємна концентрація твердої фази.

За умов $\mu_0 = 0.797 \cdot 10^{-3}$ Па · с за $T = 30$ °С, $\varphi = 0.35$. Отримали: $\mu_f = 0.797 \cdot 10^{-3}(1 + 2.5 \cdot 0.35 + 10.05 \cdot 0.35^2 + 0.00273 \exp(16.6 \times 0.35)) \approx 2.522 \cdot 10^{-3}$ Па · с.

На кожному часовому кроці після оновлення концентраційного поля $C(x, y)$ проводилося перенормування в'язкості в усіх вузлах сітки. Це дало змогу врахувати ефекти згущення за високих концентрацій (до 35 %), характерних для роботи промислового сепаратора.

Проведено серію тестів на збіжність розв'язку за зменшення кроку по часу та згущення сітки. Встановлено, що квадратична апроксимація дає змогу досягти стабільної збіжності за відносної похибки менше 1 %. Особливу увагу приділено зонам з високим градієнтом концентрації частинок – для них встановлено критерій адаптивного згущення сітки за похідною ∇C .

У двох сітках обчислювальної області спірального сепаратора типу СВШ-2-1000 і спірального сепаратора лабораторного масштабу з різними профілями поперечного перерізу верхня межа обчислювальної області не перешкоджала нормальному розвитку плівки потоку. Сітки були зроблені суттєво тонкими поблизу жолоба, щоб захопити чисту поверхню плівки потоку. Зокрема, мінімальна висота сітки на межі жолоба була встановлена на 0,2 і 0,15 мм для спірального сепаратора типу СВШ-2-1000 і спірального сепаратора лабораторного масштабу відповідно. Найменша відстань (безрозмірна відстань до стінки) від межі жолоба для першого вузла становила приблизно 4 для спірального сепаратора типу СВШ-2-1000 і 2 для спірального сепаратора лабораторного масштабу відповідно. Отже, вся обчислювальна область спірального сепаратора типу СВШ-2-1000 з 5 витками була розділена на шестигранні сітки $1.85 \cdot 10^6$, а спіральний сепаратор лабораторного масштабу з 4 витками був розділений на $7.49 \cdot 10^5$ шестиграних сіток.

Межа обчислювальної області двох типів спіральних сепараторів розділена на вхідну площину, вихідну площину, верхню стінку та стінку

жолоба. До площини входу було застосовано граничну умову швидкісного входу. Напрямок швидкості живильної рідини був перпендикулярним до межі входу. Умову тиску на виході було застосовано до площини виходу. Граничні умови відсутності ковзання були застосовані до стінки жолоба, а стандартні стінкові функції були прийняті для пристінної обробки. Тим часом до верхньої стінки було застосовано граничну умову вільного ковзання.

На підставі виконаних дій було побудовано 3D-модель гвинтового каналу спірального сепаратора у вигляді закрученого жолобу із заданими параметрами: радіус $R = 0,375$ м, висота $H = 1,5$ м, кут нахилу 6° . Для розв'язання задачі було згенеровано тетраедричну сітку з локальним загущенням поблизу дна жолоба та області осадження, як надано на рис. 1.

Вивчення кінцевих швидкостей падіння мінеральних частинок у рідині є основою теоретичних та експериментальних досліджень гравітаційного збагачення. Ця характеристика має велике значення для вибору та обґрунтування оптимальних параметрів гравітаційного збагачення.

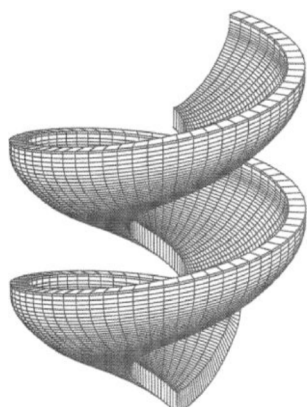


Рис. 1. Згенерована тетраедрична сітка

Результати. Використовуючи чисельне моделювання методами обчислювальної гідродинаміки, можемо визначити швидкості падіння частинок різної крупності, щільності та форми з достатньою точністю, не вдаючись до інших методик, що робить цей спосіб найбільш перспективним. Була виконана покрокова процедура обчислення швидкостей осадження мінеральних частинок та обчислено їх співвідношення:

$$\frac{v_{\text{магнетит}}}{v_{\text{кварц}}} = \frac{2,78 \times 10^{-4}}{1,12 \times 10^{-4}} = 2,48.$$

Таким чином, частинки магнетиту осаджуються приблизно у 2,48 рази швидше за частинки кварцу, що демонструє ефективність їх розділення за рахунок відмінності густин.

Розширені обчислення швидкостей осадження надано в табл. 2 для таких умов: в'язкість суспензії $2,1 \cdot 10^{-3}$ Па-с, температура $T = 30^\circ\text{C}$, концентрація твердого в живленні 35 %.

Таблиця 2
Швидкість осадження частинок різної крупності

Розмір частинки, мм	Магнетит, м/с	Кварц, м/с	Відношення	Пояснення
0,05	$2,78 \cdot 10^{-4}$	$1,12 \cdot 10^{-4}$	2,48	Базовий випадок
0,074	$6,08 \cdot 10^{-4}$	$2,45 \cdot 10^{-4}$	2,48	Стандартна фракція
0,10	$1,11 \cdot 10^{-3}$	$4,47 \cdot 10^{-4}$	2,48	Середній розмір
0,16	$2,84 \cdot 10^{-3}$	$1,14 \cdot 10^{-3}$	2,49	Крупна фракція

Аналіз показує квадратичну залежність $v \sim d^2$ та стабільність у відношенні магнетит/кварц у межах 2,48–2,49. Це підтверджує, що у всьому діапазоні розмірів частинок можлива їх ефективна сепарація.

Для оцінки точності розробленої математичної моделі було виконано порівняння розрахункових результатів зі значеннями, отриманими експериментальним шляхом. Перевірка проводилася для частинок діаметром $d = 0,1$ мм. Дані наведено у табл. 3.

Таблиця 3
Порівняння моделі з експериментом

Джерело	Швидкість осадження, м/с	Відхилення, %
Модель	$1,11 \cdot 10^{-3}$	–
Експеримент	$1,07 \cdot 10^{-3}$	3,6

Відхилення швидкості осадження між моделлю та експериментом визначалося за такою формулою:

$$\Delta = \frac{v_{\text{модель}} - v_{\text{експеримент}}}{v_{\text{модель}}} \cdot 100 \%, \quad (7)$$

де $v_{\text{модель}}$ – швидкість осадження за розрахунковою моделлю, м/с; $v_{\text{експеримент}}$ – швидкість осадження, отримана експериментально, м/с; Δ – відносне відхилення, %.

Розрахунки показали, що відхилення становить 3,6 %, що перебуває в межах допустимих значень для подібних експериментальних досліджень (до 5 %). Це свідчить про високу узгодженість моделі з експериментом та її

адекватність для прогнозування швидкості осадження частинок у розглянутих умовах.

Для частинок магнетиту розміром 0,1 мм розраховано осадження частинок за кутів 4°, 6°, 8°, 10° (табл. 4). Збільшення кута нахилу спіралі приводить до зростання прискорення частинок $g_{\text{эф}}$ і, відповідно, швидкості їх осадження. Однак за кута нахилу спіралі $>10^\circ$ виникає ризик розвитку турбулентності, що порушує стабільність течії потоку.

Таблиця 4

Вплив кута нахилу на швидкість осадження ($d = 0,1$ мм)

Кут, град	$g_{\text{эф}}, \text{м/с}^2$	$v_s, \text{м/с}$
4	0,684	$7,41 \cdot 10^{-4}$
6	1,025	$1,11 \cdot 10^{-3}$
8	1,366	$1,48 \cdot 10^{-3}$
10	1,707	$1,85 \cdot 10^{-3}$

Надалі був виконаний розрахунок швидкості осадження частинок у стиснених умовах з урахуванням в'язкості суспензії, розрахованою за залежністю (6). Результати розрахунків наведено в табл. 5.

Таблиця 5

Швидкість осадження магнетиту і кварцу

Розмір частинок, мм	Магнетит, м/с	Кварц, м/с	Відношення
0,03	$1,00 \cdot 10^{-4}$	$4,03 \cdot 10^{-5}$	2,48
0,04	$1,78 \cdot 10^{-4}$	$7,17 \cdot 10^{-5}$	2,48
0,05	$2,78 \cdot 10^{-4}$	$1,12 \cdot 10^{-4}$	2,48
0,06	$4,00 \cdot 10^{-4}$	$1,61 \cdot 10^{-4}$	2,48
0,07	$5,45 \cdot 10^{-4}$	$2,19 \cdot 10^{-4}$	2,48

З результатів розрахунків очевидно, що магнетит осаджується приблизно в 2,48 рази швидше, ніж кварц, незалежно від крупності, що створює сприятливі умови для їх ефективного розділення у спіральних сепараторах.

Порівняння результатів розрахунків (табл. 2 і табл. 5) показує, що врахування реології середовища призводить до зростання в'язкості та зменшення швидкостей осадження обох компонентів:

- зменшення $v(m)$ з $2,78 \cdot 10^{-4}$ до $2,31 \cdot 10^{-4}$ м/с;
- зменшення $v(q)$ з $1,12 \cdot 10^{-4}$ до $9,31 \cdot 10^{-5}$ м/с.

Чисельне моделювання гідродинамічних характеристик потоку та траєкторій руху частинок у спіральному сепараторі виконано із застосуванням програмного комплексу ANSYS Fluent. Геометрична модель каналу спіралі була побудована у CAD-середовищі на основі реальних розмірів дослідного сепаратора. Для опису течії використано рівняння Нав'є–Стокса у тривимірній постановці. Турбулентність моделювалася за допомогою моделі $k-\varepsilon$ з урахуванням низькошвидкісних ефектів поблизу стінок.

Граничні умови:

- вхідний переріз – швидкісний профіль із середньою швидкістю подачі суспензії V_0 ;
- вихідні перерізи – умова виходу за постійного тиску;
- стіни каналу – умова прилипання (no-slip).

Частинки різного розміру (1, 20, 50 та 100 мкм) вводилися у потік за методом Lagrangian Particle Tracking з урахуванням сил гравітації, відцентрової сили та опору середовища. Для моделювання щільних мінералів (магнетиту) та легких (кварцу) використовувалися відповідні значення густини: 5 100 кг/м³ та 2 650 кг/м³.

На рис. 2 наведено розподіл швидкостей у спіральному сепараторі у поздовжньому та поперечному перерізах.

Результати чисельного моделювання поля розділення частинок у спіральному сепараторі, що наведені на рис. 2, показали таке. На

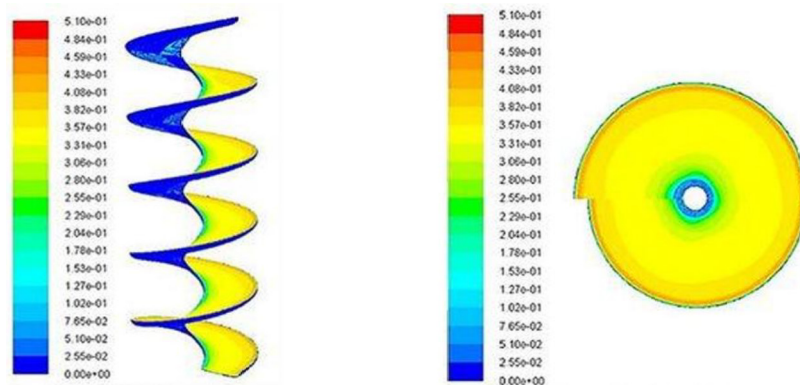


Рис. 2. Результати моделювання поля розділення частинок у спіральному сепараторі

поздовжньому зрізі спірального каналу (ліворуч) наведено просторовий розподіл параметра розділення (швидкості або концентрації частинок), що ілюструє вплив геометрії витків на траєкторію руху частинок різної густини – магнетиту та кварцу. Кольорова шкала відображає градієнт значень: від мінімальних (синій) до максимальних (червоний). Горизонтальний переріз (праворуч) демонструє концентричний характер розподілу: у центральній зоні переважають нижчі значення параметра, тоді як у периферійних областях спостерігається його підвищення, що відповідає зоні накопичення певної фракції. Видно чітке формування зони підвищених швидкостей у середній частині потоку та зниження швидкості на периферії. Цей профіль швидкостей визначає дію відцентрових сил і створює умови для гравітаційно-відцентрового розділення частинок за густиною. Результати моделювання підтверджують ефективність гідродинамічного та гравітаційно-відцентрового розділення у спіральному сепараторі та можуть бути використані для оптимізації його конструкції та режимів роботи.

На рис. 3 наведено траєкторії руху та просторовий розподіл частинок різних розмірів: (а) 1 мкм, (b) 20 мкм, (c) 50 мкм, (d) 100 мкм.

Колірна шкала відображає інтенсивність відповідного параметра (швидкість руху або концентрацію частинок): від мінімальних значень (синій) до максимальних (червоний).

З даних, наведених на рис. 3, очевидно таке.

Малі частинки (1 мкм, 20 мкм). Характеризуються складними траєкторіями з численними обертами та зміщенням у радіальному напрямку. Їхній рух суттєво залежить від турбулентності та гідродинамічного поля, що спричиняє неоднорідний розподіл по перетину каналу. Висока чутливість до сил в'язкості та локальних

змін швидкості потоку призводить до тривалішого перебування у сепараторі.

Середні частинки (50 мкм). Траєкторія стає більш стабільною та спрямованою до зовнішнього краю спіралі. Домінує дія відцентрової сили, що полегшує їх відокремлення від легкої фракції. Турбулентність потоку впливає менше, ніж для дрібних частинок.

Крупні частинки (100 мкм). Мають найбільш прямолінійні траєкторії з мінімальними коливаннями. Відцентрова сила значно перевищує вплив гідродинамічного поля, що забезпечує швидке переміщення до периферії каналу. Чітко виражена тенденція до швидкого виходу у важку фракцію.

Отже, зменшення розміру частинок (1–20 мкм) приводить до складнішої та більш розгалуженої траєкторії руху з численними обертами по висоті спіралі, що зумовлено значним впливом гідродинамічних сил і турбулентності потоку. Для більших частинок (50–100 мкм) траєкторія є більш прямолінійною, з меншою кількістю обертів, що пояснюється домінуванням гравітаційно-відцентрових сил над впливом потоку. Дійсно, дрібні частинки (1–20 мкм) піддаються сильному впливу турбулентності та утворюють складні, звивисті траєкторії. Середні частинки (50 мкм) рухаються більш стабільно, поступово зміщуючись до зовнішньої стінки. Великі частинки (100 мкм) швидко концентруються на периферії, формуючи важку фракцію.

Так, збільшення розміру частинок зменшує вплив турбулентності та сил в'язкості, водночас підвищуючи ефективність відокремлення за рахунок більшої інерції та дії відцентрових сил. Отримані результати підтверджують доцільність використання спіральних сепараторів для селективного розділення частинок з різними гранулометричними характеристиками.

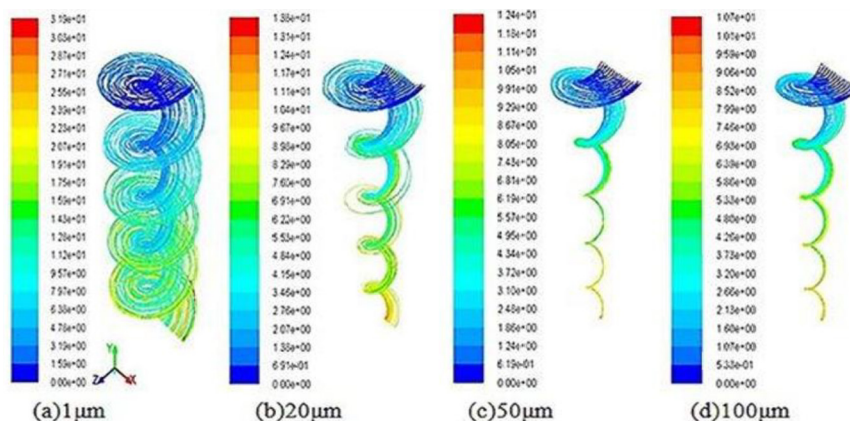


Рис. 3. Результати моделювання поля розділення частинок у спіральному сепараторі за чотирьох градієнтів розмірів частинок магнетиту та кварцу

Таблиця 6

Показники збагачення магнетитової руди

Найменування продуктів	Вихід, %	Вміст магнетиту, %	Вилучення магнетиту, %	Вихід, %	Вміст магнетиту, %	Вилучення магнетиту, %
	Спіральний сепаратор СВШ-2-1000			Лабораторний сепаратор		
Концентрат	6,1	70,7	32,9	13,3	74,4	85,4
Промпродукт	51,8	13,8	54,6	40,0	3,4	11,8
Хвости	42,1	3,9	12,5	46,7	0,7	2,8
Всього	100,0	13,1	100,0	100,0	11,6	100,0

Результати свідчать про те, що оптимальні умови для селективного розділення досягаються за наявності чіткої різниці у розмірах та густині частинок.

Для підтвердження отриманих висновків були проведені фізичні експерименти. В результаті збагачення магнетитової руди отримано концентрат, промпродукт і відходи (табл. 6).

Під час використання сепаратору типу СВШ-2-1000 в концентраті зосереджуються переважно частинки вихідної сировини крупністю менше 0,1 мм; промпродукт характеризується переважно розміром частинок 0,16–0,1 мм; у хвостах наявні переважно дрібні частинки шламової крупності (менше 0,01 мм). Під час використання лабораторного сепаратору концентрат також характеризується переважно частинками товщиною менше 0,1 мм; промпродукт за гранулометричним складом схожий з концентратом з невеликим збільшенням частки більших частинок з більшістю більше 0,1 мм; у хвості переходять переважно частинки крупністю менше 0,01 мм і великі частинки кварцу. Загалом на обох апаратах були отримані близькі показники збагачення, проте лабораторний сепаратор дав змогу виділити концентрат з вищими технологічними показниками (за виходом, вмістом та вилученням магнетиту), а використання спірального сепаратору СВШ-2-1000 забезпечило отримання багатшого промпродукту. Встановлено, що втрати цінного мінералу з хвостами сепаратора СВШ-2-1000 становлять 12,5 %, тоді як під час використання лабораторного сепаратору вони не перевищують 3 %.

Висновки. У результаті аналізу результатів проведених досліджень та їх синтезу встановлено таке.

1) Дослідження підтверджують можливість застосування методів обчислювальної гідродинаміки для моделювання процесів вільного та стисненого осадження мінеральних частинок у рідині та визначення їх швидкості падіння.

2) Ефективність розділення у спіральному сепараторі суттєво залежить від поєднання розмірів і густини частинок, а також типу профілю спіральної поверхні.

3) Зростання діаметра частинок зменшує вплив турбулентності та підвищує стабільність траєкторії, що сприяє більш чіткому поділу фракцій.

4) Отримані гідродинамічні та кінематичні характеристики можуть бути використані для оптимізації конструктивних параметрів сепаратора та режимів його роботи задля підвищення селективності процесу збагачення.

5) Побудова 3D-моделі потоку з використанням FEM відкриває перспективи для подальшої деталізації: визначення зон турбулентності, локального збагачення фракцій, аналізу розподілу концентрації за шириною каналу. Це може бути реалізовано в середовищах типу OpenFOAM або COMSOL, з якими FreeFEM++ має можливість інтеграції через формат mesh-файлів.

6) Отримані результати підтвердили результати чисельного моделювання поля розділення частинок у спіральному сепараторі. Оцінка похибки: відносна похибка між модельними та експериментальними значеннями не перевищувала прийнятний інженерний поріг (зазвичай 5–10 %, у нашому випадку 3,6 %).

7) Встановлено, що зменшення кривизни профілю поперечного перерізу спірального жолоба до слабо похилого сприяє підвищенню ефективності сепарації. Так, втрати цінного мінералу з хвостами сепаратора СВШ-2-1000 з параболічною геометрією поперечного перерізу становлять 12,5 %, тоді як під час використання лабораторного сепаратору з профілем поперечного перерізу у вигляді кривої слабо похилої вони не перевищують 3 %.

Подальші дослідження необхідно спрямувати на розроблення чисельної моделі спіральної сепарації, яка заснована на системі диференціальних рівнянь нерозривності і збереження імпульсу, модифікованих для врахування багатофазності роздільного середовища, генерації та дисипації турбулентної кінетичної енергії, а також рівнянь балансу сил, що діють на мінеральні частинки. Модель повинна вирішуватися методом визначення якісно-кількісних показників збагачення мінеральної сировини та гідродинамічних параметрів розділення.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Олійник Т. А., Румницький Д. О., Складар Л. В. Сегрегація частинок при гравітаційній сепарації мінеральних агрегатів у водному середовищі. *Вісник Криворізького національного університету*. 2023. Вип. 56. С. 47–54. DOI: <https://doi.org/10.31721/2306-5451-2023-1-56-47-54>
2. Matthews B. W., Fletcher C. A. J., Partridge A. C. Computational simulation of fluid and dilute particulate flows on spiral concentrators. *Applied Mathematical Modelling*. 1998. Vol. 22, No. 12. P. 965–979. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0307-904X\(98\)10013-0](https://doi.org/10.1016/S0307-904X(98)10013-0)
3. Meng L., Gao S., Wei D., Zhao Q., Cui B., Shen Y., Song Z. Particulate flow modelling in a spiral separator by using the Eulerian multi-fluid VOF approach. *International Journal of Mining Science and Technology*. 2023. Vol. 33, No. 2. P. 251–263. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijmst.2022.09.016>
4. Kwon J., Kim H., Lee S., Cho H. Simulation of particle-laden flow in a Humphrey spiral concentrator using dust-liquid smoothed particle hydrodynamics. *Advanced Powder Technology*. 2017. Vol. 28, No. 10. P. 2694–2705. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.appt.2017.07.021>
5. Ye G., Ma L., Alberini F., Xu Q., Huang G., Yu Y. Numerical studies of the effects of design parameters on flow fields in spiral concentrators. *International Journal of Coal Preparation and Utilization*. 2022. Vol. 42, No. 1. P. 67–81. DOI: <https://doi.org/10.1080/19392699.2018.1561312>
6. Олійник Т. А., Румницький Д. О., Складар Л. В. Визначення впливу в'язкості пульпи на процес збагачення магнетитових суспензій у гвинтових сепараторах. *Технологічний аудит та резерви виробництва. Хімічні та технологічні системи*. 2025. Т. 1, № 3 (81). С. 6–18. DOI: <https://doi.org/10.15587/2706-5448.2025.323268>
7. Li Q., Song B., Luo Z., Peng H. Numerical simulation of particle motion and separation process in spiral concentrators with different geometries. *Minerals*. 2021. Vol. 11. No. 5. P. 491. DOI: <https://doi.org/10.3390/min11050491>

REFERENCES:

1. Oliinyk, T. A., Rumnytskyi, D. O., & Skliar, L. V. (2023). Sehrehatsiia chastynok pry hgravitatsiinii separatsiі mineralnykh ahrehativ u vodnomu seredovyshchi [Segregation of particles during gravitational separation of mineral aggregates in an aqueous medium]. *Visnyk Kryvorizkoho natsionalnoho universytetu – Bulletin of Kryvyi Rih National University*, 56, 47–54. <https://doi.org/10.31721/2306-5451-2023-1-56-47-54>. [in Ukrainian].
2. Matthews, B. W., Fletcher, C. A. J., & Partridge, A. C. (1998). Computational simulation of fluid and dilute particulate flows on spiral concentrators. *Applied Mathematical Modelling*, 22 (12), 965–979. [https://doi.org/10.1016/S0307-904X\(98\)10013-0](https://doi.org/10.1016/S0307-904X(98)10013-0)
3. Meng, L., Gao, S., Wei, D., Zhao, Q., Cui, B., Shen, Y., & Song, Z. (2023). Particulate flow modelling in a spiral separator by using the Eulerian multi-fluid VOF approach. *International Journal of Mining Science and Technology*, 33 (2), 251–263. <https://doi.org/10.1016/j.ijmst.2022.09.016>
4. Kwon, J., Kim, H., Lee, S., & Cho, H. (2017). Simulation of particle-laden flow in a Humphrey spiral concentrator using dust-liquid smoothed particle hydrodynamics. *Advanced Powder Technology*, 28 (10), 2694–2705. <https://doi.org/10.1016/j.appt.2017.07.021>
5. Ye, G., Ma, L., Alberini, F., Xu, Q., Huang, G., & Yu, Y. (2022). Numerical studies of the effects of design parameters on flow fields in spiral concentrators. *International Journal of Coal Preparation and Utilization*, 42 (1), 67–81. <https://doi.org/10.1080/19392699.2018.1561312>
6. Oliinyk, T. A., Rumnytskyi, D. O., & Skliar, L. V. (2025). Vyznachennia vplyvu v'iazkosti pulpy na protses zbahachennia magnetytovykh suspensii u hvyntovykh separatorakh [Determination of the influence of pulp viscosity on the enrichment process of magnetite suspensions in screw separators]. *Tekhnolohichniy audyt ta rezervy vyrobnytstva. Khimichni ta tekhnolohichni systemy – Technology audit and production reserves. Chemical and technological systems*, 1 (3 (81)), 6–18. <https://doi.org/10.15587/2706-5448.2025.323268>
7. Li, Q., Song, B., Luo, Z., & Peng, H. (2021). Numerical simulation of particle motion and separation process in spiral concentrators with different geometries. *Minerals*, 11 (5), 491. <https://doi.org/10.3390/min11050491>

Стаття надійшла: 11.07.2025

Стаття прийнята: 05.08.2025

Опублікована: 10.11.2025

