

УДК 621.771.23:539.374:519.61

DOI <https://doi.org/10.32782/3041-2080/2025-5-16>

КОМП'ЮТЕРНЕ ТА ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНОГО СТАНУ БІМЕТАЛЕВИХ КОНСТРУКТИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Міхєєнко Денис Юрійович,

кандидат технічних наук,

доцент кафедри природничо-наукових та загальноінженерних дисциплін

ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»

ORCID ID: 0000-0003-1966-0618

Грудкіна Наталія Сергіївна,

доктор технічних наук,

професор кафедри природничо-наукових та загальноінженерних дисциплін

ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»

ORCID ID: 0000-0002-0914-8875

Герасименко Олексій Васильович,

кандидат технічних наук, доцент,

доцент кафедри матеріалознавства та прикладної механіки

ТОВ «ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «МЕТІНВЕСТ ПОЛІТЕХНІКА»

ORCID ID: 0000-0001-9895-2023

У статті розглянуто математичне моделювання напружено-деформованого та пружно-пластичного стану двошарових біметалічних планок, які є важливими елементами конструкцій прокатного устаткування й експлуатуються у діапазоні підвищених температур. Актуальність дослідження обумовлена широким застосуванням біметалів у зонах інтенсивного тертя та динамічних навантажень, де необхідне забезпечення високої зносостійкості, термостабільності та економії дефіцитних матеріалів, а також точне прогнозування їхньої поведінки під дією складних фізико-механічних факторів та умов експлуатації.

Запропоновано чисельну модель, яка враховує різні варіанти конструктивного зацемлення планок (жорстке, часткове, вільне) та неоднорідний температурний розподіл по товщині, апроксимований степеневою функцією. Модель реалізує розбиття двошарової композиції на скінченну кількість елементарних об'ємів, для кожного з яких розраховуються температури, деформації та нормальні напруження з урахуванням лінійного теплового розширення та межі текучості матеріалів.

Особливу увагу приділено реалізації ітераційних алгоритмів коригування довжини та кривизни планок залежно від граничних умов (нульова сила або момент). Використано системний аналіз, а також створено параметризовану 3D-модель у CAD-системі, що дає змогу комплексно оцінювати поведінку конструкції, проводити детальну візуалізацію результатів та оптимізувати її геометричні й матеріальні параметри. Графічні результати чисельного моделювання демонструють немонотонний характер розподілу фізико-механічних параметрів по товщині. Запропонована модель може бути ефективно використана для проектування та оптимізації біметалевих елементів прокатного обладнання, а також для детального аналізу термомеханічних процесів у композитних та багатошарових матеріалах різного технічного призначення.

Ключові слова: біметалічна планка, чисельне моделювання, напружено-деформований стан, температура, пружність, прокатне устаткування, ітераційний розрахунок, термодеоформація, згинальний момент, конструктивне зацемлення, системний аналіз, 3D-модель, CAD-система.

Mikhieienko Denys, Hrudkina Natalia. Computer and numerical modeling of the thermomechanical state of bimetallic structural elements

The article addresses the mathematical modeling of the stress-strain and elastic-plastic states of two-layer bimetallic strips, which are important structural elements of rolling equipment operating at elevated temperatures. The relevance of this study is determined by the widespread use of bimetals in zones of intensive friction and dynamic loading, where high wear resistance, thermal stability, and efficient use of scarce materials are required, as well as accurate prediction of their behavior under complex physical-mechanical factors and operational conditions.

A numerical model is proposed that accounts for different types of structural clamping of the strips (rigid, partial, free) and a non-uniform temperature distribution across the thickness, approximated by a power function. The model implements discretization of the two-layer composite into a finite number of elementary volumes, for each of which temperatures, deformations, and normal stresses are calculated, taking into account linear thermal expansion and material yield limits.

Special attention is given to the implementation of iterative algorithms for adjusting the length and curvature of the strips depending on boundary conditions (zero force or moment). A system analysis approach is used, and a parametric 3D model developed in a CAD system enables comprehensive evaluation of structural behavior, detailed visualization of results, and optimization of geometric and material parameters. Graphical results of the numerical simulation demonstrate the non-monotonic nature of stress and deformation distribution across the thickness. The proposed model can be effectively used for the design and optimization of bimetallic components in rolling equipment, as well as for detailed analysis of thermomechanical processes in composite and multilayer materials of various technical applications.

Key words: bimetallic strip, numerical modeling, stress-strain state, temperature, elasticity, rolling equipment, iterative calculation, thermodeformation, bending moment, structural clamping, systems analysis, 3D model, CAD system.

Вступ. Як конструктивні елементи механічного обладнання сучасних прокатних станів широко застосовуються двошарові біметалічні планки різних типів виконання. Їх використання забезпечує підвищену довговічність контактних пар тертя, зниження рівня динамічних навантажень, покращення корозійної стійкості та низку інших експлуатаційних переваг. Важливою перевагою таких конструкцій є можливість суттєвої економії дефіцитних та дорогих матеріалів завдяки комбінуванню шарів з різними властивостями. Водночас істотні відмінності у фізико-механічних характеристиках матеріалів шарів біметалічних планок спричиняють зміну їхнього напружено-деформованого стану, особливо у діапазоні підвищених температур, що характерно для допоміжного обладнання станів гарячої прокатки.

У статті представлено чисельну математичну модель напружено-деформованого стану [1–3] двошарових біметалічних планок, що функціонують у діапазоні підвищених температур і використовуються як елементи конструкцій прокатного устаткування.

Методи та методики дослідження. У дослідженні застосовано принципи системного аналізу [4–8], що дало змогу комплексно врахувати фізико-механічні характеристики матеріалів, геометричні параметри, варіанти заземлення та теплові навантаження. В рамках побудови моделі було проведено дискретизацію товщини планки на кінцеве число елементарних об'ємів, для кожного з яких виконано розрахунок температури, деформації та напружень. Температурний розподіл по товщині моделювався з використанням степеневих залежностей.

Результати. Згідно зі схемою, поданою на рис. 1, у загальному випадку температурний розподіл по товщині біметалічної пластини є неоднорідним і може бути описаний такими залежностями:

$$\begin{aligned} t_i &= t_{01} + (t_{11} - t_{01}) \cdot (y_{ci} - h_2/H - h_2)^{a_{t1}} \quad \text{при } 0 \leq y \leq h_2 \\ t_i &= t_{02} + (t_{12} - t_{01}) \cdot (h_2 - y_{ci}/h_2)^{a_{t2}} \quad \text{при } h_2 \leq y \leq H, \end{aligned} \quad (1)$$

де i – порядковий номер елементарного обсягу біметалічної балки;

t_{11}, t_{12} – кінцева температура нагріву внутрішньої та зовнішньої сторін деталі відповідно;

t_{01}, t_{02} – температура на межі шарів біметалу;

H – загальна товщина композиції;

h_1, h_2 – товщина першого та другого шарів композиції відповідно;

a_{t1}, a_{t2} – степеневий показник, що відображає реальну форму розрахункового розподілу температури за товщиною першого та другого шарів композиції відповідно.

Для подальшого розв'язання поставленої задачі товщину біметалічної пластини поділяємо на скінченну кількість елементарних об'ємів з відповідними порядковими номерами $i = 1 \dots kr$. Геометрична координата середньої лінії кожного такого елемента y_{ci} визначається за співвідношенням:

$$y_{ci} = \Delta y \cdot i - \Delta y/2, \quad \Delta y = H/kr. \quad (2)$$

Можна встановити, що зі зростанням температури з t_0 до t_i кожен i -й шар зазнає подовження:

$$\Delta L_i = \alpha_j \cdot (t_i - t_0) L_{0i}, \quad (3)$$

де α_j – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу поточного шару;

L_i – вихідна довжина го елементарного об'єму.

Таким чином, під час нагрівання деталі до температури t_i поточна довжина i -го шару визначається так:

$$L_i = L_{0i}(1 + \alpha_j \cdot (t_i - t_0)). \quad (4)$$

Оскільки компоненти деталі з'єднані жорстко та взаємно обмежують деформації один одного, шари з більшим коефіцієнтом лінійного розширення зазнають стискальних напружень, тоді як шари з меншим коефіцієнтом – розтягувальних. У результаті дії внутрішніх напружень під час нагрівання біметалічна балка набуває вигину.

Окремий елементарний об'єм з точки зору напружено-деформованого стану металу може бути охарактеризований подовжніми складовими частинами відносних деформацій розтягування-стискання та відповідними їм нормальними напруженнями:

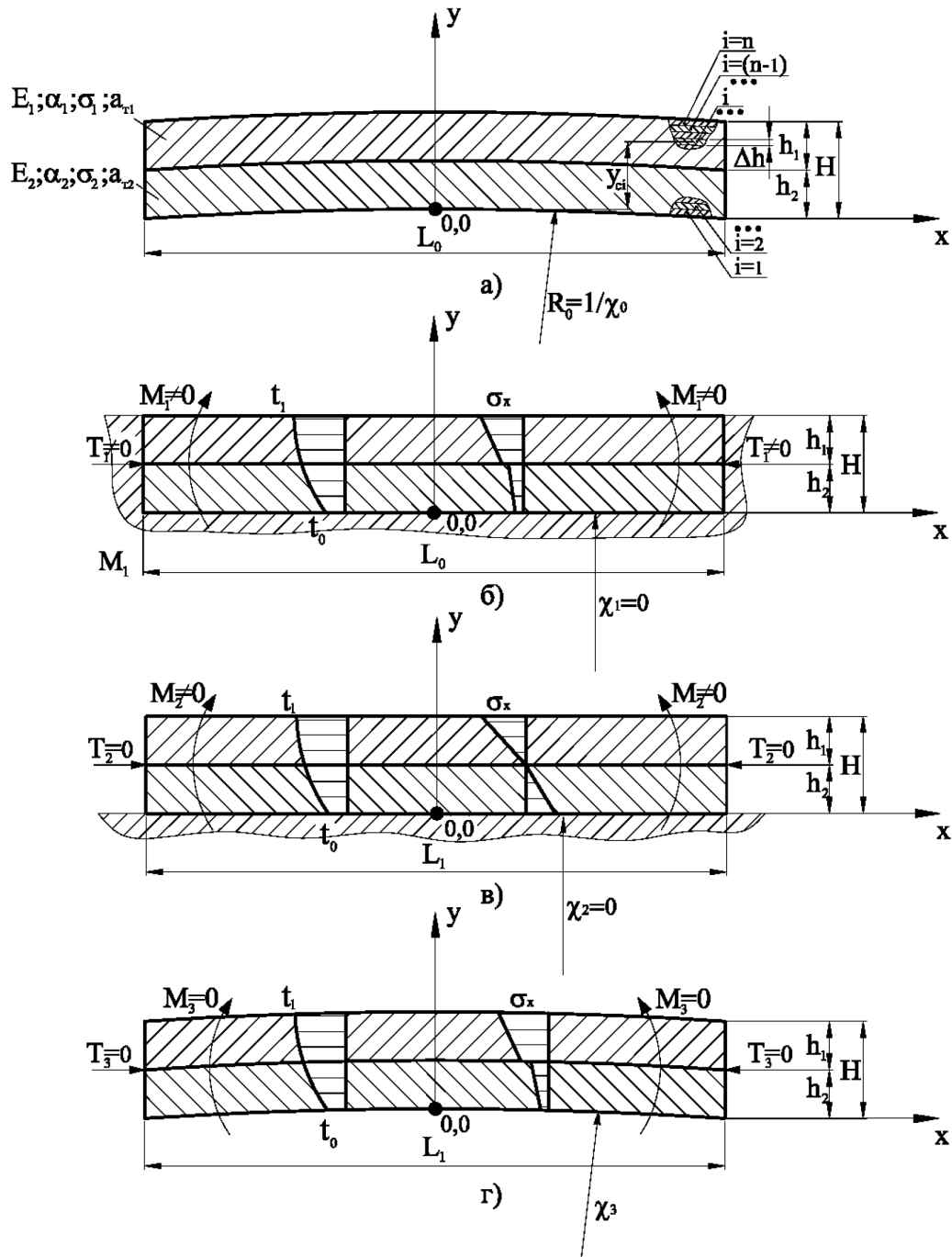


Рис. 1. Розрахункові схеми напружено деформованого стану біметалевих деталей, що працюють у діапазоні підвищених температур

$$\varepsilon_i = (L_{li} - L_{0i})/L_{0i};$$

$$\sigma_i = E_{ij} \cdot \varepsilon_i, \quad (5)$$

де L_{0i} , L_{li} – вихідна та кінцева довжина го елементарного об'єму;

E_{ij} – модуль пружності матеріалу j -ї складової частини.

З урахуванням прийнятих позначень величини поздовжнього натягу та згинального моменту визначаються таким чином:

$$T = \sum_{i=0}^m \sigma_i \cdot h_i \cdot b_i;$$

$$M = \sum_{i=0}^m \sigma_i \cdot h_i \cdot (y_{ci} - H/2) \cdot b_i. \quad (6)$$

Результуючу кривизну середнього шару поліметалічної композиції χ_c та відповідну відносну деформацію ε_c , що задовольняє умову статичної рівноваги граничних перерізів деталі, визначали з використанням чисельного

ітераційного підходу, алгоритм якого має такий вигляд:

$$\begin{aligned}\chi_{c(t+1)} &= \chi_{ct} - \frac{M_t}{E_{np} \cdot J_n}; \\ \varepsilon_{c(t+1)} &= \varepsilon_{ct} - \frac{T_t}{E_{np} \cdot F_\Sigma},\end{aligned}\quad (7)$$

де t – порядковий номер чергового циклу ітераційної процедури рішення.

Перерахунок натягу та згинальних моментів здійснюється шляхом визначення величини відносних деформацій розтягування-стискання ε_{ki} , що можуть бути отримані на основі геометричного рішення вигнутої смуги з початковою кривизною χ_i :

$$\varepsilon_{ki} = \frac{(1 + \chi_t \cdot y_{ci}) \cdot \varepsilon_{ct} + (\chi_t - \chi_i) \cdot y_{ci}}{1 + \chi_i \cdot y_{ci}}. \quad (8)$$

Для оцінки збіжності ітераційного рішення застосовували відповідні критерії:

$$\delta = \left(\frac{T \cdot 10^5}{\sigma_{Tc} \cdot F_\Sigma} \right)^2 + \left(\frac{M \cdot 10^5}{\sigma_{Tc} \cdot W_\Sigma} \right)^2 \leq [\delta] = 1. \quad (9)$$

Представлені в роботі залежності дали змогу сформулювати повний алгоритм автоматизованого розрахунку термопружного деформованого стану біметалічних листів за неоднорідного розподілу температури по товщині, який наведено на рис. 2.

Програмні засоби для автоматизованого розрахунку напруженого та пружно-деформованого стану біметалічних листів за неоднорідного температурного розподілу по товщині дали змогу отримати розрахункові профілі відносних деформацій та нормальних напруг у товщі біметалічної композиції, що наведено на рис. 3.

Аналіз отриманих результатів показав, що розподіл як напружень, так і деформацій має доволі складний, неоднорідний і немонотонний характер, який визначається впливом низки факторів, зокрема схемами навантаження (рис. 1, б, в, г). Це підтверджує доцільність застосованого чисельного підходу, який за відповідного коригування може бути використаний і для розрахунку поліметалічних планок.

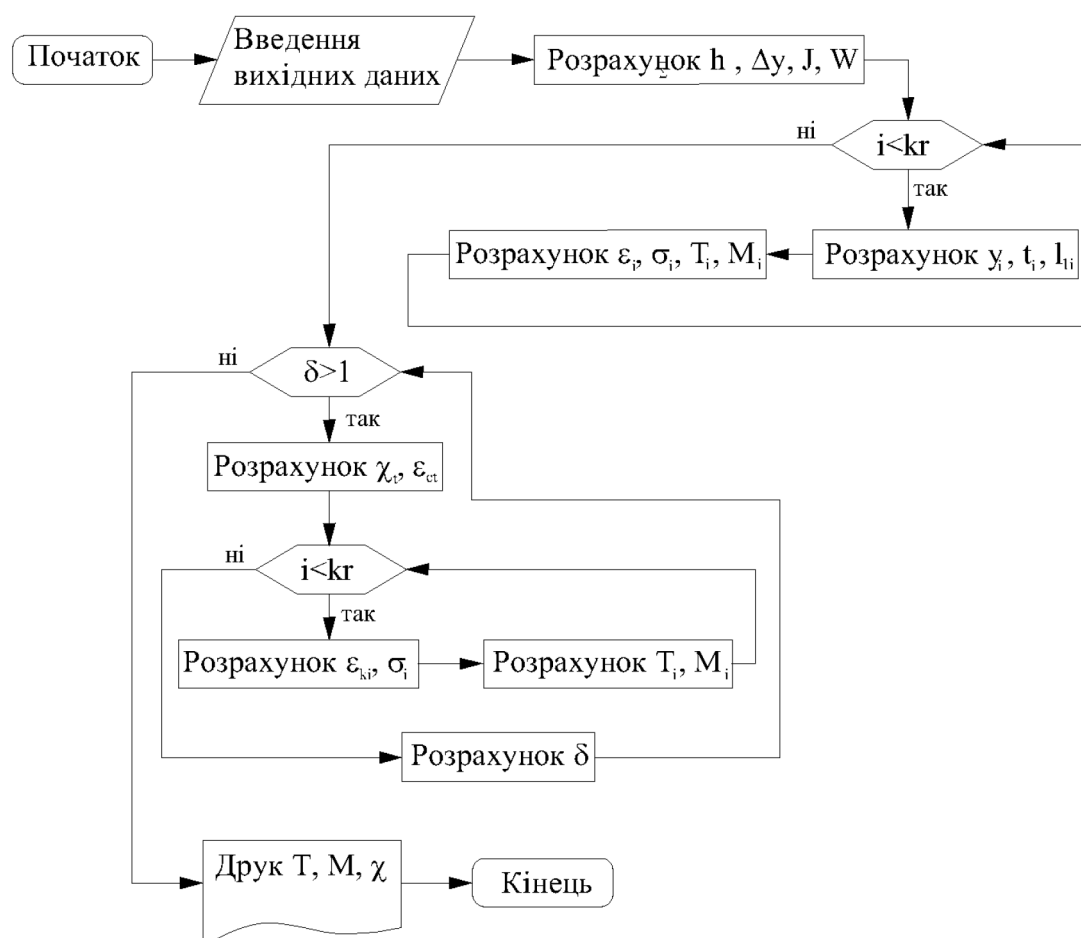


Рис. 2. Блок-схема алгоритму з автоматизованого розрахунку напруженого та пружно-деформованого стану біметалічних листів за неоднорідного розподілу температури за товщиною

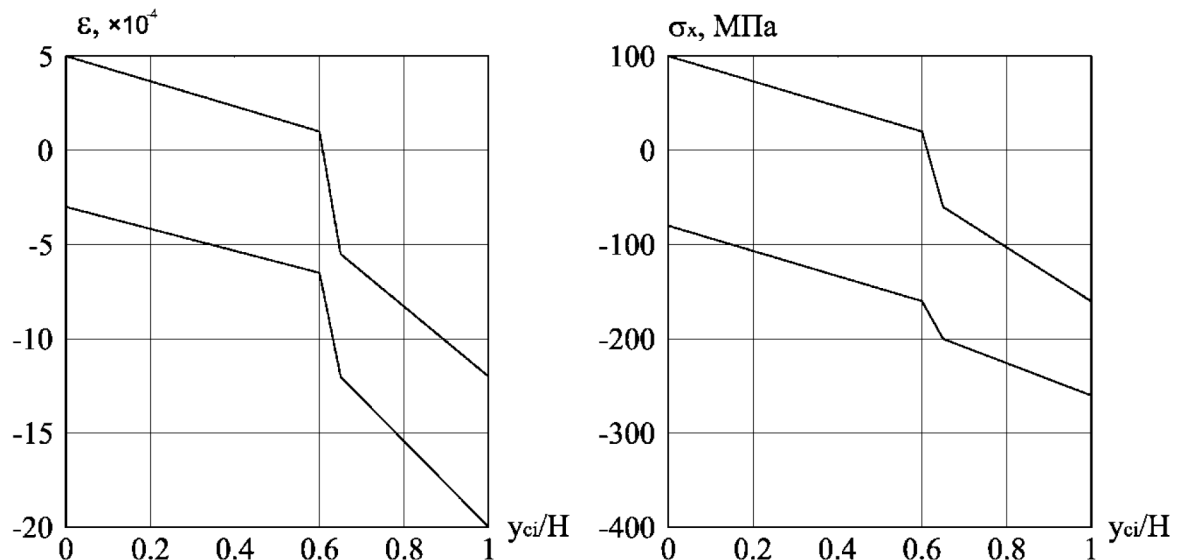


Рис. 3. Розрахункові розподіли відносної деформації та нормальних напруг по товщині біметалічної композиції

У результаті чисельного моделювання отримано залежності розподілу відносних деформацій та нормальних осьових напружень у біметалічних планках для трьох варіантів закріплення. Розрахунки показали, що характер зміни напружень і деформацій має складний, немонотонний та неоднорідний вигляд, що зумовлено різницею у фізико-механічних властивостях матеріалів шарів, температурним градієнтом по товщині та граничними умовами.

За повного защемлення спостерігається найбільша концентрація напружень у зоні контакту шарів, що може призвести до локальних зон пластичної деформації. Часткове защемлення зменшує рівень напружень, однак сприяє

зростанню згинальних моментів. У разі вільної планки відбувається зміна її поздовжньої кривизни, що підтверджує чутливість системи до температурних навантажень.

Використання ітераційних алгоритмів дало змогу досягти умов рівноваги ($T = 0$, $M = 0$) із заданою точністю, що підтверджує коректність вибраної чисельної методики. У майбутньому планується верифікація результатів у САЕ-системах для оцінки відповідності чисельних розрахунків комп'ютерним симуляціям та перевірки адекватності побудованої моделі.

Для цього вже створена у CAD-системі (рис. 4) параметризована 3D-модель підкладки з поздовжніми пазами для біметалічної листової композиції з механічним зв'язком складових частин

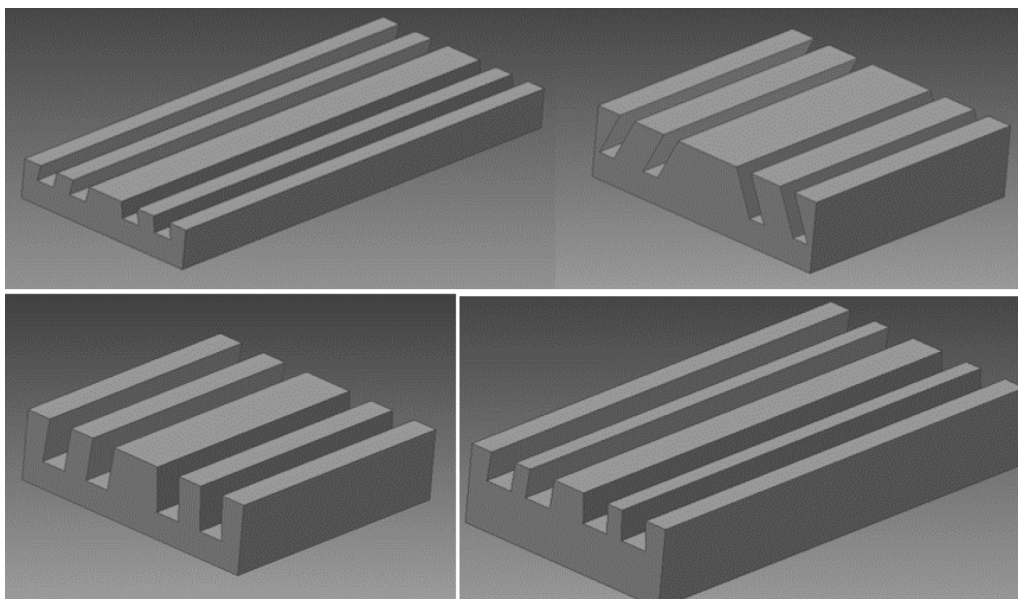


Рис. 4. Параметризована 3D-модель підкладки з поздовжніми пазами для біметалічної листової композиції з механічним зв'язком складових частин

листової композиції з механічним зв'язком складових частин [9; 10]. Використання цієї моделі дасть змогу проводити точні розрахунки пружно-деформованого та напруженого стану конструкції, аналізувати вплив геометрії пазів і матеріалів на поведінку композиції, а також оптимізувати конструктивні параметри підкладки для забезпечення необхідної жорсткості та термостійкості.

Висновки. Можна дійти таких висновків:

- у результаті чисельного моделювання отримано залежності розподілу відносних деформацій та нормальних осьових напружень у біметалічних планках для трьох варіантів закріплення; розрахунки показали, що характер зміни напружень і деформацій має складний, немонотонний та неоднорідний вигляд, що зумовлено різницею у фізико-механічних властивостях матеріалів шарів, температурним градієнтом по товщині та граничними умовами;
- для формалізації досліджуваної задачі були застосовані методи системного аналізу, що дало змогу чітко визначити взаємозв'язки

між складовими частинами системи та ключові фактори впливу; на основі отриманих результатів була побудована алгоритмічна модель, яка забезпечує покрокове обчислення фізико-механічних параметрів та дає змогу проводити чисельне моделювання термомеханічного стану біметалічних конструктивних елементів;

– розроблена у CAD-системі параметризована 3D-модель підкладки з поздовжніми пазами для біметалічної листової композиції дає змогу проводити точні розрахунки пружно-деформованого та напруженого стану конструкції, аналізувати вплив геометрії та матеріалів на поведінку композиції і оптимізувати конструктивні параметри підкладки для забезпечення необхідної жорсткості та термостійкості;

– отримані результати можуть бути використані для детального аналізу та оптимального проєктування біметалічних деталей прокатного обладнання нового покоління, що дає змогу підвищити їхню зносостійкість, термостійкість та ефективність експлуатації в умовах інтенсивних навантажень.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Altenbach H., Bogdanov V., Grigorenko A. Y., Kushnir R. M., Nazarenko V. M., Eremeyev V. A. (eds) *Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials*, vol 204. Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9>
2. Кулік Т. О. Виробництво листового металопрокату з використанням режимів теплового деформування. *Перспективи розвитку, розширення сфери використання та вдосконалення технологій і обладнання*: монографія. Краматорськ : ДДМА, 2020. 128 с. ISBN 978-966-379-958-2.
3. Калюжний В. Л. Комп'ютерні методи моделювання процесів виготовлення конструкцій літальних апаратів: конспект лекцій. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. 176 с.
4. Основи системного аналізу. Конспект лекцій: методичні рекомендації з дисципліни «Системний аналіз» / укладачі: Цибко Г. Ю., Горошко Ю. В. Чернівці : НУЧК, 2025, 117 с.
5. Tilley S., Rosenblatt H. J. *Systems Analysis and Design*. Cengage Learning, 2021. 752 с. ISBN: 9780357117811.
6. Satzinger J. W., Jackson R. B., Burd S. D. *Systems Analysis and Design in a Changing World*. Cengage Learning, 2020. 720 p. ISBN: 9781305117204.
7. Valacich J. S., George J. F. *Modern Systems Analysis and Design*. Pearson Education, 2020. 552 p. ISBN: 9780135791578.
8. Dennis A., Wixom B. H., Tegarden D. *Systems Analysis and Design: An Object-Oriented Approach with UML*. John Wiley & Sons, 2021. 544 p. ISBN: 9781119561217.
9. Патент 21238 України МПК В 23 К 20/04. Спосіб виробництва двошарових біметалевих листових композицій / В. А. Федорінов, О. В. Сатонін, А. О. Сатонін, Д. Ю. Міхєєнко; Донбаська державна машинобудівна академія. No 2006 07687; заявл. 10.07.06; опубл. 15.03.07; бюл. No 3. 8 с.
10. Міхєєнко Д. Ю., Грудкіна Н. С. Теоретичні дослідження процесу виробництва прокаткою відносно товстих двошарових біметалевих листових заготовок з механічним з'єднанням. *Науковий Журнал Метінвест Політехніки. Серія: Технічні науки*. 2024. № 1. С. 7–12. URL: <https://doi.org/10.32782/3041-2080/2024-1-1>

REFERENCES:

1. Altenbach, H., Bogdanov, V., Grigorenko, A. Y., Kushnir, R. M., Nazarenko, V. M., Eremeyev, V. A. (eds) *Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials*, vol 204. Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9>

2. Kulik, T. O. (2020). *Vyrobnytstvo lystovoho metaloprokatu z vykorystanniam rezhymiv teploho deformuvannia. Perspektyvy rozvytku, rozshyrennia sfery vykorystannia ta vdoskonalennia tekhnologii i obladnannia: monohrafiia* [Production of sheet metal using warm deformation modes. Prospects for development, expansion of application, and improvement of technologies and equipment: Monograph]. Kramatorsk : DDMA. ISBN 978-966-379-958-2. [in Ukrainian].
3. Kaliuzhnyi, V. L. (2022). *Kompiuterni metody modeliuvannia protsesiv vyhotovlennia konstruksii litalnykh aparativ: konspekt leksii* [Computer methods of modeling the processes of manufacturing aircraft structures: Lecture notes]. Kyiv : KPI im. Ihoria Sikorskoho. [in Ukrainian].
4. Tsybko, H. Yu., & Horoshko, Yu. V. (2025). *Osnovy systemnoho analizu. Konspekt leksii: Metodychni rekomendatsii z dystsypliny "Systemnyi analiz"* [Fundamentals of systems analysis. Lecture notes: Methodical recommendations for the discipline "Systems analysis"]. Chernihiv : NUCHK. [in Ukrainian].
5. Tilley, S., & Rosenblatt, H. J. (2021). *Systems Analysis and Design*. Cengage Learning, 752 p. ISBN: 9780357117811.
6. Satzinger, J. W., Jackson, R. B., & Burd, S. D. (2020). *Systems Analysis and Design in a Changing World*. Cengage Learning, 720 p. ISBN: 9781305117204.
7. Valacich, J. S., & George, J. F. (2020). *Modern Systems Analysis and Design*. Pearson Education, 552 p. ISBN: 9780135791578.
8. Dennis, A., Wixom, B. H., & Tegarden, D. (2021). *Systems Analysis and Design: An Object-Oriented Approach with UML*. John Wiley & Sons, 544 p. ISBN: 9781119561217.
9. Fedorinov, V. A., Satonin, O. V., Satonin, A. O., & Mikhieienko, D. Yu. (2007). *Sposib vyrobnytstva dvoshapovykh bimetalovykh lystovykh kompozytsii* [Method of producing double-layer bimetallic sheet compositions]. Patent of Ukraine No. 21238. Donbas State Machine-Building Academy. Application No. 2006 07687; filed 10.07.2006; published 15.03.2007, Bulletin No. 3. 8 p. [in Ukrainian].
10. Mikhieienko, D. Yu., & Hrudkina, N. S. (2024). *Teoretychni doslidzhennia protsesu vyrobnytstva prokattiam vidnosno товstyx dvoshapovykh bimetalovykh lystovykh zahotivok z mekhanichnym ziednanniam* [Theoretical studies of the production process by rolling relatively thick double-layer bimetallic sheet blanks with mechanical bonding]. *Naukovyi Zhurnal Metinvest Politekhniky. Seriya: Tekhnichni nauky – Metinvest Polytechnic Scientific Journal. Series: Technical Sciences*, (1), 7–12. <https://doi.org/10.32782/3041-2080/2024-1-1> [in Ukrainian].

Стаття надійшла: 21.08.2025

Стаття прийнята: 18.09.2025

Опублікована: 10.11.2025

